BAHAN AJAR
STATISTIK LANJUT

Oleh:

Padrul Jana, M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS PGRI YOGYAKARTA

2020

HALAMAN PENGESAHAN

1.	Bahan Ajar Mata Kuliah	: Statistika Lanjut
2.	Pelaksana	
	a. Nama Lengkap	: Padrul Jana, M.Sc
	b. Jenis Kelamin	: Laki-laki
	c. Pangkat/Golongan	: Penata Tk.I/IIId
	d. NIS	: 19890417 201508 1 012
	e. Program Studi/Fakultas	: Pendidikan Matematika/FKIP
	f. Alamat	:Jl.PGRI I Sonosewu No.117 Yogyakarta
	g. Alamat Rumah	: Warungboto UH IV NO 1016E RT/RW 39/08 Kota Yogyakarta
	h. Telepon/Faks/Email	: 085295579152/ padrul.jana@upy.ac.id
3.	Pembiayaan	
	a. Sumber Dana	: P3AI UPY
	b. Jumlah Biaya	: Rp. 750.000, 00

Mengetahui,	Yogyakarta, 15 Desember 2020
Ketua Program Studi	Dosen Pengampu,
Siska Candra Ningsih, M. Sc.	Padrul Jana, M.Sc
NIS : 19780923 201401 2 002	NIS. 19890417 201508 1 012

Menyetujui,

Kepala LPP

Selly Rahmawati M.Pd

NIS. 19870723 201302 2 002

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi robbil ‘alamin, telah selesai bahan ajar Statistika Inferensi sebagai salah satu pegangan belajar bagi mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas PGRI Yogyakarta.

Materi bahasan disusun secara sistematis dan diusahakan agar mdah dipahami untuk memotivasi mahasiswa yang bersemangat belajar matematika guna menjawab tantangan masa depan yang memerlukan sikap kritis, inovatif, dan kreatif menemukan solusi yang tepat terhadap masalah yang dihadapi bangsa dan negara.

Penyajian materi Statistika Inferensial dimulai dengan materi yang mudah, sederhana, dan berlanjut pada pembahasan materi yang lebih kompleks dan bertingkat kesukarannya. Kami berharap pemahaman mahasiswa dapat mengantarkan pada penguasaan materi Statistika Inferensial yang optimal.

Akhirnya kami selaku penulis menyadari benar bahwa naskah ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena ini, dengan rendah hati kami mohon saran dan kritik yang membangun guna penyempurnaanya. Semoga bermanfaat. Amin.

Penulis

TINJAUAN MATA KULIAH

Mata kuliah Statistika Inferensial merupakan mata kuliah yang memberi pemahaman kepada mahasiswa tentang konsep-konsep statistika khususnya mengenai penarikan kesimpulan untuk sebuah populasi melalui sampel. Dijabarkan ke dalam materi: Pengantar Statistika Penelitian, Estimasi Titik, Interval Kepercayaan untuk Distribusi Normal dan Uji Hipotesis untuk Distribusi Normal . Secara umum tujuan dari mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menjelaskan statistika inferensi. Secara khusus tujuan dari mata kuliah ini agar mahasiswa dapat:

1. Statistika Penelitian
2. Metode Estimasi Titik dari Berbagai Metode
3. Mencari Interval Kepercayaan Mean suatu Populasi dari Sampel
4. Uji Hipotesis untuk Distribusi Normal

Manfaat dari mata kuliah ini adalah memperluas wawasan dan pemahaman mahasiswa terhadap statistika inferensi serta memperbaiki kesalahan pamahaman konsep statistika yang selama ini banyak ditemukan di lapangan. Selain itu melalui mata kuliah ini mahasiswa menjadi lebih percaya diri dalam mengajarkan matematika, khususnya statistika.

BAB I
PENGANTAR STATISTIKA PENELITIAN

A. PENDAHULUAN

Pada bab satu ini, akan dibahas mengenai beberapa pengertian statistika, penggolongan statistika, proses statistika. Tujuan setelah mempelajari bab ini, mahasiswa punya bekal pengetahuan dasar yang cukup untuk memahami materi pada bab selanjutnya. Bagian penutup akan berisi kesimpulan mengenai bahasan pada bagian penyajian.

B. PENYAJIAN

1. Pengertian Statistika

Data adalah keterangan mengenai suatu keadaan pada sejumlah objek yang diteliti atau diamati. Data dapat dibagi menjadi dua kategori yaitu data statis dan data dinamis. Data statis dikumpulkan atau diperoleh dengan menghentikan proses dan kemudian mengukur hasil/akibat dari proses tersebut. Data dinamis adalah data yang ada dalam proses. Data dikumpulkan ketika proses terus berlangsung agar data yang dikumpulkan alamiah sebagaimana dalam proses sehari-hari. Statistika adalah kegiatan pengolahan data statis, secara spesifik statistika adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan dan penyusunan data, pengolahan data, dan penganalisisan data, serta penyajian data berdasarkan kumpulan dan analisis data yang dilakukan.

2. Penggolongan Statistika

Statistika untuk penelitian paling tidak dapat digolongkan dalam tiga cara, yaitu berdasarkan masalah penelitian, berdasarkan sasaran penelitian dan berdasarkan terpenuhinya asumsi.

a) Berdasarkan Masalah Penelitian

Berdasarkan masalah penelitiannya, statistika dibagi menjadi tiga yaitu statistika untuk penelitian deskriptif, statistika untuk penelitian korelasi dan statistika untuk penelitian perbandingan. Penelitian deskriptif adalah penelitian yang hanya melibatkan satu variabel saja. Contohnya penelitian mengenai hasil belajar mata pelajaran matematika siswa SMA Muhammadiyah 3 Yogyakarta. Penelitian korelasi adalah penelitian yang dilakukan dengan menghubungkan satu atau lebih variabel dengan satu atau lebih variabel lainnya. Contohnya penelitian mengenai mengenai motivasi belajar siswa dengan prestasi belajar mata pelajaran matematika. Penelitian perbandingan adalah penelitian yang dilakukan dengan membandingkan dua atau lebih kelompok dalam hal satu variabel. Contohnya penelitian mengenai perbedaan prestasi belajar mata pelajaran matematika antara siswa yang berasal dari kelas VIIA dengan siswa kelas VIIB di SMP Muhammadiyah 3 Yogyakarta. Dalam pengolahan data, ketiga masalah penelitian tersebut membutuhkan statistika yang berbeda-beda.

b) Berdasarkan Sasaran Penelitian

Berdasarkan sasaran penelitiannya, statistika dibagi menjadi statistika deskriptif dan statistika inferensi (induktif). Statistika deskriptif adalah statistika dimana pengumpulan, penyajian dan pengolahan data dilakukan atas data yang diambil dari seluruh populasi. Populasi sendiri adalah keseluruhan unsur yang memiliki/mempunyai karakteristik yang sama, contohnya siswa, sekolah, guru dll. Apabila statistika digunakan untuk mengumpulkan, menyajikan dan mengolah data yang diambil seluruh elemen populasi maka statistika yang digunakan adalah statistika deskriptif.

Statistika inferensi (Induktif) adalah statistika dimana pengumpulan, penyajian dan pengolahan data dilakukan atas data yang diambil dari sampel. Sampel adalah sebagian dari populasi yang merupakan perwakilan dari populasi karena mempunyai kesamaan sifat dari populasi. Apabila pengumpulan, penyajian dan pengolahan data dilakukan atas data yang diperoleh dari sampel maka statistika yang digunakan adalah statistika induktif.

Perbedaan mendasar statistika deskriptif dan statistika inferensi terletak pada perlu atau tidaknya dilakukan penarikan kesimpulan. Dalam statistika deskriptif, proses meliputi kegiatan pengumpulan, penyajian dan pengolahan data. Dalam statistika inferensi disamping kegiatan pengumpulan, penyajian dan pengolahan data juga ada penarikan kesimpulan. Penarikan kesimpulan yang dimaksud adalah sebagai generalisasi kesimpulan yang diperoleh dari sampel untuk populasi tempat dimana sampel tersebut diambil.

c) Berdasarkan Terpenuhinya Asumsi

Berdasarkan terpenuhinya asumsi atau tidak, statistika dibagi menjadi dua yaitu statistika parametrik dan statistika nonparametrik. Statistika parametrik adalah statistika yang digunakan apabila berbagai asumsi yang dituntut terpenuhi. Pengolahan data meliputi dua kegiatan yaitu pengujian asumsi dan pengujian hipotesis. Pengujian asumsi dilakukan sebelum pengujian hipotesis. Jika dalam pengujian asumsi menunjukan bahwa asumsi terpenuhi maka pengujian hipotesisnya menggunakan statistika parametrik.

Statistika nonparametrik adalah statistika yang digunakan apabila hasil pengujian pada data tidak terpenuhinya asumsi yang dibutuhkan/dituntut. Tidak terpenuhinya asumsi mengakibatkan tidak diperkenankannya menggunakan statistika parametrik, sehingga statistika yang digunakan adalah nonparametrik.

Penggunaan statistika parametrik maupun nonparametrik memberikan akibat yang berbeda. Hasil pengolahan data menggunakan statistika parametrik dapat diperluas (digeneralisasi) kesimpulannya untuk populasi, sebab dengan terpenuhinya asumsi sampel menunjukan sifat-sifat yang sama (identik) dengan populasi. Sebaliknya, dalam penggunaan statistika nonparametrik hasil pengolahan data tidak dapat digeneralisasikan kesimpulannya untuk populasi.

3. Proses Statistika

Statistika adalah proses yang melibatkan kegiatan pengumpulan data, penyajian dan pengolahan data serta penarikan kesimpulan. Proses tersebut akan diuraikan sebagai berikut.

a) Pengumpulan Data

Data adalah keterangan mengenai suatu keadaan pada sejumlah objek. Data dikumpulkan dari objek (responden) mengenai suatu keadaan (variabel) dari objek tersebut.

Dalam pengumpulan data terdapat tiga hal yang harus diketahui yaitu objek dari mana data dikumpulakan, keadaan atau sifat yang akan dikumpulkan datanya dan alat pengumpulan data.

i. Objek dari mana data akan dikumpulkan

Dalam penelitian kuantitatif, objek yang akan dikumpulkan datanya dikenal dengan responden. Responden dapat berupa orang atau benda.

ii. *Keadaan yang akan dikumpulkan datanya*

Dalam penelitian kuantitatif, keadaan atau sifat yang akan dikumpulkan datanya dikenal dengan variabel. Misalnya dari karung gandum dikumpulkan data berat, dari pasien dikumpulkan data suhu dan dari siswa dikumpulkan data hasil belajar.

iii. *Alat pengumpulan data*

Pengumpulan data dilakukan dilakukan atas objek pada keadaan tertentu yang akan dikumpulkan datanya. Pengumpulan data dilakukan dengan mengukur keadaan atau sifat objek. Pengukuran untuk pengumpulan data itu dilakukan menggunakan alat ukur atau instrument pengumpulan data. Misalkan mengukur berat dengan timbangan, mengukur hasil belajar dengan tes hasil belajar.

4. Penyajian Data

Data yang terkumpul dari hasil proses pengumpulan data masih merupakan data yang berserakan. Data tersebut masih sult dibaca dan dipahami. Untuk membuat data mudah dipaham, maka dari data yang terkumpul perlu disajikan dalam proses penyajian data.

Disamping sulit dipahami, data yang dikumpulkan masih sulit diolah dalam proses pengolahan data. Pengolahan data yang dilakukan atas data mentah lebih sulit dibandingkan dengan pengolahan data yang telah disusun. Oleh karena itu, kegiatan penyajian data memudahkan melakukan pengolahan data.

Penyajian atau penyusunan data adalah penyusunan dan pengaturan data dalam susunan dan bentuk yang semaksimal mungkin mudah dipahami. Penyajian data itu dapat dilakukan dalam bentuk table, grafik, diagram. Penyajian data dalam bentuk table dapat berupa baris dan kolom, table distribusi frekuensi tunggal, table distribusi kelompok. Penyajian data dalam bentuk grafik dapat berupa grafik batang, garis, lingkaran, histogram, kurva, gambar, peta dan sebagainya.

5. Pengolahan Data

Setelah data dikumpulkan dan disajikan, selanjutnya diolah. Pengolahan data tergantung pada dua hal yaitu penelitian terpenuhi atau tidaknya asunsi/prasyarat. Berdasarkan terpenuhi atau tidaknya asumsi, pengolahan data dapat menggunakan statistika parametrik atau nonparametrik. Bila sejumlah asumsi yang dituntut terpenuhi maka pengolahan data menggunakan statistika parametrik. Sebaliknya jika tidak dipenuhi oleh datanya maka pengolahan data menggunakan statistika nonparametrik.

6. Penarikan Kesimpulan

Penelitian dapat dilakukan atas populasi dan sampel akan menentukan perlu atau tidaknya suatu penarikan kesimpulan. Penarikan kesimpulan (inferensi) adalah usaha memperluas kesimpulan dengan menarik kesimpulan atas sampel kepada populasinya. Penelitian populasi tidak memerlukan penarikan kesimpulan, statistika yang digunakan dinamakan statistika deskriptif. Penarikan kesimpulan diperlukan pada penelitian yang dilakukan atas sampel. Statistika yang digunakan dinamakan statistika inferensial.

C. PENUTUP

Statistika digunakan tanpa disadari dalam kehidupan sehari-hari. Statistika juga digunakan dalam penelitian kuantitatif. Dalam penggunaannya untuk penelitian, statistika dapat digolongkan berdasarkan masalah penelitian, sasaran penelitian, dan terpenuhi atau tidaknya suatu asumsi yang diajukan. Proses statistika meliputi pengumpulan data, penyajian data, pengolahan data dan penarikan kesimpulan.

BAB II
ESTIMASI TITIK

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai metode penaksiran yang terdiri dari tiga metode yaitu metode kemungkinan maksimum, metode momen, metode Bayesian dan kriteria untuk menilai penaksiran yang terdiri dari penaksir tak bias dan penaksir UMVU.

B. PENYAJIAN

1. Metode Kemungkinan Maksimal (*Maximum Likelihood Estimation/MLE*)

Metode kemungkinan maksimum merupakan metode untuk memperoleh estimator titik dengan cara memaksimumkan fungsi kemungkinan. Misalkan X adalah peubah acak kontinu / diskrit dengan fungsi kepadatan peluang $f(x;\theta)$, dengan θ adalah suatu parameter yang tidak diketahui, dan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel acak berukuran n yang *independent and identically distributed (i.i.d.)*, maka fungsi kemungkinan maksimum θ adalah:

$$L(\hat{\theta}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

Dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ adalah nilai dari distribusi probabilitas bersama atau fungsi kepadatan peluang bersama (*pdf)* dari variabel-variabel random $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang diamati pada titik sampel.

Karena nilai θ yang memaksimalkan fungsi $L(\theta)$ akan sama dengan nilai θ yang memaksimalkan logaritma *likelihood* atau $\ln L(\theta)$, maka untuk mencari penaksir kemungkinan maksimum dapat dengan cara memaksimalkan fungsi logaritma *likelihood*nya.

Contoh 2.1.

Variabel random x berdistribusi Bernoulli, dengan parameter θ, jika fungsi probabilitasnya berbentuk.

$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$ dengan $x = 0{,}1$ dan $0 < \theta < 1$. Carilah penaksir dari parameter θ menggunakan metode kemungkinan maksimum.

Jawab.

$L(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)$$

$$L(\theta) = \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}.\theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \dots \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$

$$L(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Dengan mengambil logaritma dari kedua sisi, diperoleh

$$\ln L(\theta) = \sum_{x=1}^{n} x_i \ln \theta + \left(n - \sum_{x=1}^{n} x_i\right) \ln(1-\theta)$$

Apabila kedua sisi diturunkan terhadap θ, didapatkan

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\sum_{x=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{(n - \sum_{x=1}^{n} x_i)}{1-\theta}$$

Dengan menyamakan persamaan di atas denga 0, diperoleh

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\frac{\sum_{x=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{(n - \sum_{x=1}^{n} x_i)}{1-\theta} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Turunan kedua dari $\ln L(\theta)$ adalah

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{\sum_{x=1}^{n} x_i}{\theta^2} - \frac{(n - \sum_{x=1}^{n} x_i)}{(1-\theta)^2}$$

Karena $\hat{\theta} = \bar{x}$ nilai $\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} < 0$ maka fungsi kemungkinan $\ln L(\theta)$ mencapai nilai maksimum pada $\hat{\theta} = \bar{x}$. Jadi penaksir kemungkinan maksimum untuk parameter θ adalah $\hat{\theta} = \bar{x}$.

Contoh 2.2.

Variabel random x berdistribusi eksponensial, dengan parameter θ, jika fungsi probabilitasnya berbentuk.

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ dengan $x > 0$ dan $\theta > 0$. Carilah penaksir dari parameter θ menggunakan metode kemungkinan maksimum.

Jawab.

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)$$

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} . \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_2}{\theta}} \dots . \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_n}{\theta}}$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Dengan mengambil logaritma kedua sisi, diperoleh

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{x=1}^{n} x_i$$

Lalu diturunkan terhadap θ, diperoleh

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{x=1}^{n} x_i$$

Dengan persamaan turunan disamadengan 0 dan penyelesaian untuk θ, yaitu:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Karena

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} < 0$$

Pada nilai $\hat{\theta} = \bar{x}$ maka diperoleh penaksir kemungkinan maksimum untuk θ adalah $\hat{\theta} = \bar{x}$.

Contoh 2.3.

Variabel random x berdistribusi poisson, dengan parameter θ, jika fungsi probabilitasnya berbentuk.

$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$ dengan $x = 0,1,2, \dots$ dan $\theta > 0$. Carilah penaksir dari parameter θ menggunakan metode kemungkinan maksimum.

Jawab.

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)$$

$$L(\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^{x_3}}{x_3!} \dots \cdot \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!}$$

$$L(\theta) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\ln L(\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \theta - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

Turunan $\ln L(\theta)$ terhadap θ dan kemudian disamadengankan 0 maka diperoleh penyelesaian untuk θ, yaitu:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Karena turunan kedua dari $\ln L(\theta) < 0$ pada $\hat{\theta} = \bar{x}$, maka penaksir kemungkinan maksimum untuk θ adalah $\hat{\theta} = \bar{x}$.

Metode kemungkinan maksimum juga bisa digunakan untuk estimasi bersama parameter dari suatu populasi yang diberikan.

2. Metode Momen

Metode momen dikemukakan oleh Karl Pearson pada tahun 1800 dan merupakan metode tertua dalam menentukan estimator titik. Dasar dari metode momen adalah menyamakan karakteristik sampel tertentu seperti mean dan variansi untuk nilai-nilai yang diharapkan populasi yang bersesuaian dan kemudian menyelesaikan persamaan yang dihasilkan untuk mendapatkan nilai perkiraan parameter tidak diketahui.

Jika $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah sampel random dari populasi dengan fungsi probabilitas $f(x;\theta)$, maka moment populasi ke- k didefinisikan sebagai $\mu_k = E(X^k)$. Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah sampel random dari populasi dengan fungsi probabilitas $f(x;\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Estimator metode moment didapat dengan menyamarkan k moment sampel populasi dan menyelesaikan system persamaan secara simultan yang dihasilkan (diselesaikan untuk $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$).

Contoh 2.4.

Variabel random x berdistribusi eksponensial, dengan parameter θ, bila fungsi probabilitasnya berbentuk

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ dengan $x > 0$ dan $\theta > 0$. Carilah penaksir dari parameter θ menggunakan metode momen.

Jawab.

Terlebih dahulu dicari nilai $E(x)$.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\theta)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

Menggunakan integral substitusi:

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{\theta} x$ diperoleh

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}$

$dx = \theta dy$

Sehingga

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} y e^{-y}\, \theta dy$$

$$= \theta \int_{0}^{\infty} y e^{-y}\, dy$$

$$= \theta \Gamma(2)$$

$$= \theta\,(2-1)\,\Gamma(2-1)$$

$$= \theta$$

Penaksir momen untuk θ diperoleh dengan menyelesaikan

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Untuk θ. Karena $E(x) = \theta$ maka

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Jadi penaksir momen untuk θ adalah $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Contoh 2.5.

Variabel random x berdistribusi poisson, dengan parameter λ, bila fungsi probabilitasnya berbentuk

$f(x;\theta) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ dengan $x = 0,1,2,\ldots$ dan $\lambda > 0$. Carilah penaksir dari parameter λ menggunakan metode momen.

Jawab.

Terlebih dahulu dicari nilai $E(x)$.

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$

Misal: $y = x - 1$, batas-batasnya untuk $x = 1$, maka $y = 0$ dan untuk $x = \infty$, maka $y = \infty$ sehingga diperoleh:

$$E(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!}$$

$$= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

$$= \lambda(1) = \lambda$$

Penaksir momen untuk λ diperoleh dengan menyelesaikan

$$E(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Untuk λ. Karena $E(x) = \lambda$ maka

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Jadi penaksir momen untuk λ adalah $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Contoh 2.6.

Variabel random x berdistribusi gamma, dengan parameter α, β, bila fungsi probabilitasnya berbentuk

$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ dengan $x > 0$ dan $\alpha, \beta > 0$. Carilah penaksir dari parameter α, β menggunakan metode momen.

Jawab.

Terlebih dahulu dicari nilai $E(x)$ dan (x^2) .

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; \theta)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

Menggunakan integral substitusi:

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{\beta} x$ diperoleh $x = \beta y$ dan $dx = \beta dy$

Sehingga

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} (\beta y)^{\alpha} e^{-\frac{\beta y}{\beta}}\, \beta dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 1)$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$= \alpha\beta$$

Dengan cara yang sama ,

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;\alpha,\beta)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\ dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\ dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}\ dx$$

Menggunakan integral substitusi:

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{\beta} x$ diperoleh $x = \beta y$ dan $dx = \beta dy$

Sehingga

$$E(x^2) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (\beta y)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta y}{\beta}}\ \beta dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha+1} e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2)$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$= \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

Penaksir momen untuk α dan β diperoleh dengan menyelesaikan

$E(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ dan $E(x^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$

Untuk α dan β. Karena $E(x) = \alpha\beta$ dan $E(x^2) = \beta^2(\alpha+1)\alpha$ maka :

$\alpha\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ dan $\beta^2(\alpha+1)\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan secara simultan untuk α dan β diperoleh penaksir momen untuk α dan β yaitu

$\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\beta}}\bar{x}$ dan $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2 - \bar{x}^2}{n\bar{x}}$

3. Metode Bayesian

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah sampel random dari populasi dengan fungsi probabilitas $f(x;\theta)$ dimana θ adalah parameter. Jika $\pi(\theta)$ adalah distribusi **prior** untuk parameter θ, menurut teorema Bayes distribusi **posterior** untuk parameter θ dapat dinyatakan sebagai:

$$\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Jika θ kontinu dan

$$\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)}{\sum f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)}$$

Jika θ diskrit.

Penaksir bayes untuk parameter θ adalah $E(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ yaitu:

$\hat{\theta} = \int \theta\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta$ jika θ kontinu, dan

$\hat{\theta} = \sum \theta\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ jika θ diskrit

Contoh 2.7.

Variabel random x berdistribusi poisson, dengan parameter θ, bila fungsi probabilitasnya berbentuk

$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$ dengan $x = 0,1,2, \dots$. dan $\theta > 0$.

Dan misalkan distribusi prior untuk parameter θ adalah distribusi gamma dengan parameter α dan β. Carilah penaksir bayes untuk θ.

Jawab.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$= \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Menurut teorema bayes, distribusi posterior untuk parameter θ adalah

$$\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

$$= \frac{\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\int \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}d\theta}$$

$$\propto e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

$$\propto \theta^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i-1}e^{-(n+\frac{1}{\beta})\theta}$$

Distribusi posterior untuk parameter θ adalah distribusi gamma dengan parameter $\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i$ dan $(n + \frac{1}{\beta})^{-1}$. Sehingga penaksir bayes untuk parameter θ adalah $\hat{\theta} = \frac{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+\frac{1}{\beta}}$.

4. Kriteria Untuk Menilai Penaksir

4.1. Penaksir Tak Bias

Suatu penaksir T disebut penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$ jika $E(\theta) = \tau(\theta)$ untuk semua $\theta \in \Omega$. Selanjutnya penaksir T disebut penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$.

Contoh 2.8.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random dari sebuah populasi berdistribusi eksponensial dengan parameter θ. Tunjukan bahwa $\bar{x}$ adalah penaksir tak bias untuk θ.

Jawab.

Karena x_i $(i = 1,2,3, \dots, n)$ berdistribusi eksponensial maka $E(\bar{x}) = \theta$ selanjutnya,

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n}n\theta = \theta$$

Karena $E(x) = \theta$ maka $\bar{x}$ adalah penaksir tak bias untuk θ.

Contoh 2.9.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random dari sebuah populasi bernoulli dengan parameter p. Tunjukan bahwa $\bar{x}$ adalah penaksir tak bias untuk p.

Jawab. (sebagai latihan)

Contoh 2.10.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random dari sebuah populasi dengan fungsi kepadatan peluang $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}\ x > 0$. Tunjukan bahwa $\bar{x}$ adalah penaksir tak bias untuk $\frac{1}{\theta}$. **Jawab. (sebagai latihan)**

4.2. Penaksir UMVU

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x|\theta)$. Suatu penaksir T^* untuk $\tau(\theta)$ disebut penaksir Estimator Takbias variansi minimum seragam/UMVU (*Uniformly Minimum Variance Unbiased*) untuk $\tau(\theta)$ jika :

1. T^* adalah penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$
2. Untuk penaksir tak bias lain T untuk $\tau(\theta)$ berlaku $Var\ (T^*) \leq Var(T)$.

Masalah baru yang dihadapi adalah estimator tak bias jumlahnya bisa tak hingga. Untuk itu, untuk menentukan estimator UMVU diperlukan penanganan yang menyeluruh, salah satunya melalui **batas bawah Cramer-Rao/*Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)***. Jika kita menemukan estimator T^* sedemikian sehingga Var(T^*) sama dengan nilai batas bawah tersebut, maka kita mendapatkan estimator UMVU.

Batas Bawah Cramer-Rao/*Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Jika T adalah estimator takbias dari $\tau(\theta)$, maka batas bawah Cramer-Rao atau *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB), berdasarkan pada sebuah sampel acak, adalah:

$$Var(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)\right]^2}$$

Catatan: Jika domain integral tidak tergantung pada parameter θ, maka:

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta)\right]^2$$

Contoh 2.11.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel random dari sebuah populasi berdistribusi eksponensial dengan parameter θ. Tunjukan bahwa $\bar{x}$ adalah penaksir UMVU untuk θ.

Jawab.(Sebagai Latihan)

C. PENUTUP

Pada bagian ini berisi soal-soal latihan untuk mahasiswa dengan tujuan mempersiapkan mahasiswa untuk mengukur kemampuan/kompetensi berdasarkan tujuan yang ingin dicapai.

SOAL-SOAL:

1. Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah nilai-nilai dari sampel random dari sebuah populasi dengan kepadatan probabilitas

   $f(x|\beta) = \frac{1}{6\beta^4} x^3 e^{-\frac{1}{\beta}x}$ dengan $x > 0$ dan $\beta > 0$.

   Temukan penaksir momen dari parameter β.
2. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel random dari sebuah populasi dengan fungsi kepadatan peluang $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ tunjukan bahwa $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ adalah penaksir tak bias untuk $\frac{1}{\theta^2}$.

BAB III
INTERVAL KEPERCAYAAN UNTUK DISTRIBUSI NORMAL

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai mencari interval kepercayaan untuk distribusi normal. Kasus pertama apabila variansi diasumsikan diketahui nilainya, kasus kedua apabila variansi diasumsikan tidak diketahui nilainya.

B. PENYAJIAN

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan n variabel random dengan fungsi kepadatan peluang gabungan $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$, $\theta \in \Omega$, dengan Ω adalah suatu interval. Andaikan bahwa $L = l(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dan $U = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ keduanya adalah statistik. Interval kepercayaan didefinisikan sebagai berikut:

Suatu interval $[l(X_1, X_2, \dots, X_n), u(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ disebut interval kepercayaan $100(1 - \alpha)\%$ untuk θ bila:

$P[l(x_1, x_2, \dots, x_n) < \theta < u(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha$ dengan $0 < \alpha < 1$. Nilai $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut batas kepercayaan bawah dan atas. Pecahan $1 - \alpha$ disebut koefisien kepercayaan atau taraf kepercayaan.

1. Kasus variansi populasi diketahui

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan suatu sampel random dari populasi normal, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan σ^2 diasumsikan diketahui nilainya, maka interval kepercayaan untuk μ sebagai berikut:

Penaksir titik untuk mean populasi μ diberikan oleh statistik $\bar{X}$. Interval kepercayaan untuk μ dapat ditentukan menggunakan distribusi sampel $\bar{X}$. Bila kita mendefinisikan $Z = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$

Maka $Z \sim N(0,1)$ sehingga

$$P\left[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

Kalikan tiap suku didalam ketaksamaan dengan $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diperoleh

$$P[-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < (\bar{x} - \mu) < z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 - \alpha$$

$P[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 - \alpha$

Jadi diperoleh interval kepercayaan $100(1-\alpha)$% yaitu:

$(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Contoh 3.1.

Diketahui rata-rata IPK dari sampel random seorang manager dari 36 perusahaan adalah 2,6. Bila sampel yang diambil dari populasi berdistribusi normal. Hitunglah interval kepercayaan 95% ($\alpha = 5$ %) untuk mean nilai IPK manager suatu perusahaan dan diasumsikan simpangan baku populasi 0,3.

Jawab.

Diketahui:

n = 36

$\bar{x}$ = 2,6

σ = 0,3

α = 5 % = 0,05

$\bar{x}$ - $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2,6 - $Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{0,3}{\sqrt{36}}$

= 2,6 - $Z_{0,025} \frac{0,3}{\sqrt{36}}$

= 2,6 – 1,96. $\frac{0,3}{6}$

= 2,6 – 0,098

= 2,502

$\bar{x}$ + $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2,6 + $Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{0,3}{\sqrt{36}}$

= 2,6 + $Z_{0,025} \frac{0,3}{\sqrt{36}}$

= 2,6 + 1,96. $\frac{0,3}{6}$

= 2,6 + 0,098

= 2,698

Jadi, interval kepercayaan adalah (2,502 $< \mu <$ 2,698)

Contoh 3.2.

Sampel random berikut menyatakan banyaknya pengiriman logistik suatu perusahaan setiap bulan: 10,18,17,12,15,9,16,13,11,10,14,12. Hitung interval kepercayaan 99% untuk mean banyaknya pengiriman logistik dari data di atas. Anggap bahwa distribusi pengiriman logistik norma, dengan simpangan baku 1.

Jawab.

Diketahui:

n= 12

α= 1%= 0,01

σ= 1

$\bar{x}= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$

$= \frac{157}{12}$

= 13,08

$$\bar{x} - Z_{\frac{\sigma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13{,}08 - Z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$
$$= 13{,}08 - Z_{0{,}005} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$
$$= 13{,}08 - 2{,}575 . \frac{1}{3{,}46}$$
$$= 13{,}08 - 2{,}575 . 0{,}289$$
$$= 13{,}08 - 0{,}744$$
$$= 12{,}336$$

$$\bar{x} + Z_{\frac{\sigma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13{,}08 + Z_{\frac{0{,}01}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$
$$= 13{,}08 + Z_{0{,}005} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$
$$= 13{,}08 + 2{,}575 . \frac{1}{3{,}46}$$
$$= 13{,}08 + 2{,}575 . 0{,}289$$
$$= 13{,}08 + 0{,}744$$
$$= 12{,}842$$

Jadi, interval kepercayaan $(12{,}336 < \mu < 13{,}842)$

Contoh 3.3.

sampel random berikut mnyatakan banyaknya telepon yang masuk ke bagian call center untuk complain pada suatu perusahaa tiap tahunya: 4213 2703 2638 4951 2600 hitunglah interval kepercayaan 95% untuk mean banyaknya telepon yang masuk ke

bagian call center diatas anggap bahwa distribusi normal dengan simpangan baku 1.
Jawab.

$n = 5$
$\bar{x} = 3421$
$\sigma = 1$
$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3421 - Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 - Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 - 1{,}96.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 - 0{,}878$$
$$= 3{,}420$$

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3421 + Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 + Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 + 1{,}96.\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 3421 + 0{,}878$$
$$= 3{,}421$$

Jadi, kita peroleh intervalnya adalah $3{,}420 < \mu < 3{,}421$

Contoh 3.4.

Penelitian dalam dunia penerbangan menggunakan sampel 100 pilot dengan mean lamanya jam terbang 250. Sampel ini diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan variansi 36. Hitunglah interval kepercayaan 99% untuk mean lamanya jam terbang pilot.

Jawab.

Diketahui: $n = 100$
$\bar{x} = 250$
$\alpha = 1\% = 0{,}001$
$\sigma = \sqrt{36} = 6$

Ditanya: Berapa interval kepercayaan 99% untuk mean lamanya jam terbang pilot?

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 250 - Z_{0{,}01/2}.\frac{6}{\sqrt{100}}$$
$$= 250 - Z_{0{,}005}.\frac{6}{\sqrt{10}}$$
$$= 250 - 2{,}575.0{,}6$$
$$= 250 - 1{,}545$$
$$= 248{,}455$$

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 250 + Z_{0,01/2} \cdot \frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$= 250 + Z_{0,005} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$= 250 + 2,575.0,6$$

$$= 250 + 1,545$$

$$= 251,545$$

Jadi intervalnya adalah $248,455 < \mu < 251,545$

Contoh 3.5.

Tabel dibawah ini merupakan menunjukkan data umur konsumen yang diambilnya secara random. Sampel random dimisalkan diambil dari populasi normal diketahui simpangan baku populasinya adalah 5,38.

Konsumen ke	Umur	Konsumen ke	Umur
1	20	11	7
2	22	12	7
3	21	13	12
4	5	14	10
5	19	15	20
6	17	16	21
7	18	17	19
8	18	18	22
9	20	19	21
10	21	20	20

Tabel Umur Konsumen

Hitunglah tentukan interval kepercayaan 95% untuk umur konsumen tersebut.

Jawab.

Diketahui:

n = 20

$\bar{x}$ = 17

σ = 5,38

α = 5 % = 0,05

Jawab:

$\bar{x}$ - $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 17 - $Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{5,38}{\sqrt{20}}$

= 17 - $Z_{0,025} \frac{5,38}{\sqrt{20}}$

= 17 – 1,96. $\frac{5,38}{4,47}$

$= 17 – 1,96.\ 1,20$
$= 17 – 2,352$
$= 14,\ 648$
$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 17 + Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{5,38}{\sqrt{20}}$
$= 17 + \ Z_{0,025} \frac{5,38}{\sqrt{20}}$
$= 17 + 1,96.\ \frac{5,38}{4,47}$
$= 17 + 1,96.\ 1,20$
$= 17 + 2,352$
$= 19,352$
Jadi, interval kepercayaan adalah $(14,648 < \mu < 19,352)$

Contoh 3.6.

Sebanyak 30 kotak yang masing-masing berisi 50 motherboard diambil secararandom. Tiap-tiap kotak dicek dan dihitung banyaknya motherboard yang cacat. Datanya disajikan dalam tabel berikut:

No Kotak	Banyaknya yang cacat	No Kotak	Banyaknya yang cacat
1	12	16	8
2	15	17	10
3	8	18	5
4	10	19	13
5	4	20	11
6	10	21	20
7	16	22	18
8	9	23	24
9	14	24	15
10	10	25	9
11	8	26	12
12	6	27	7
13	17	28	13
14	12	29	12
15	22	30	10

Tentukan interval kepercayaan 90% untuk mean banyaknya motherboard yang cacat. Anggap bahwa distribusi banyaknya motherboard yang cacat berdistribusi normal dengan simpangan baku 4,73 !

Jawab.

Diketahui:

$n = 30$

$\alpha = 10\% = 0{,}1$

$\sigma = 4{,}73$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{x=i}^{n} x_i \ = \frac{360}{30}$

$= 12$

$\bar{x} - z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\bar{x} - z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 12 - z_{0,1/2}\left(\frac{4{,}73}{\sqrt{30}}\right)$

$= 12 - z_{0,05}\left(\frac{4{,}73}{5{,}47}\right)$

$= 12 - 1{,}645\left(\frac{4{,}73}{5{,}47}\right)$

$= 12 - 1{,}42$

$= 10{,}58$

$\bar{x} - z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 12 + z_{0,1/2}\left(\frac{4{,}73}{\sqrt{30}}\right)$

$= 12 + z_{0,05}\left(\frac{4{,}73}{5{,}47}\right)$

$= 12 + 1{,}645\left(\frac{4{,}73}{5{,}47}\right)$

$= 12 + 1{,}42$

$= 13{,}42$

Jadi selang kepercayaan 90 % adalah $10{,}58 < \mu < 13{,}42$

Contoh 3.7.

Diberikan sampel data jumlah penumpang pesawat terbang yang diambil secara random sebagai berikut.

28269	28851	24852	28460	38003	45500	67867
80087	96335	22398	36922	34130	32699	45658

51487	61960	80139	97656	27295	31954	30117
33603	33381	49311	60822	77196	108302	24325
31721	23012	39355	55846	53433	65657	75545
107662	326260	31224	31269	31269	51140	57839
54428	80618	106092	101004	103324	106026	103924
88201						

Tabel 2.3 Jumlah penumpang pesawat terbang

Bila jumlah penumpang pesawat terbang diasumsikan berdistribusi populasi normal dengan simpangan baku 27987, maka tentukanlah interval kepercayaan untuk mean jumlah penumpang pesawat terbang tersebut dengan tarap kepercayaan 90%.

Jawab.

n=50

$$\bar{x} = \frac{3102428}{50} = 62048{,}56$$

$$\sigma = 27987$$

$$\alpha = 10\ \% = 0{,}1$$

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 62048{,}56 - Z_{\frac{0,1}{2}} \frac{27987}{\sqrt{50}}$$

$$= 62048{,}56 - Z_{0,05} \frac{27987}{5\sqrt{2}}$$

$$= 62048{,}56 - 1{,}65\,.\,3957{,}959$$

$$= 62048{,}56 - 6530{,}632$$

$$= 55517{,}928$$

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 62048{,}56 + Z_{\frac{0,1}{2}} \frac{27987}{\sqrt{50}}$$

$$= 62048{,}56 + Z_{0,05} \frac{27987}{5\sqrt{2}}$$

$$= 62048{,}56 + 1{,}65\,.\,3957{,}959$$

$$= 62048{,}56 + 6530{,}632$$

$$= 68579{,}192$$

Jadi, selang kepercayaannya adalah

$$(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$(55517{,}928 < \bar{x} < 68579{,}192)$$

Contoh 3.8.

Pencatatan lamanya di pasaran dari 25 barang mempunyai rata-rata 140 hari. Jika data ini diperlihatkan sebagai sampel random dari populasi normal dengan simpangan baku 10 hari, hitung interval kepercayaan 95% untuk mean lamanya barang di pasaran!

Jawab.

Diketahui:

$n = 25$

$\bar{x} = 140$

$\sigma = 10$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

Ditanya: interval kepercayaan?

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 140 - Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$= 140 - Z_{0,025} \cdot 2$$

$$= 140 - 1{,}96 \cdot 2$$

$$= 140 - 3{,}92$$

$$= 136{,}08$$

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 140 + Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$= 140 + Z_{0,025} \cdot 2$$

$$= 140 + 1{,}96 \cdot 2$$

$$= 140 + 3{,}92$$

$$= 143{,}92$$

Jadi, interval kepercayaan 95% untuk σ yaitu $(136{,}08; 143{,}92)$.

Intervalnya $136{,}08 < \sigma < 143{,}92$.

Contoh 3.9.

Menurut survey yang dilakukan oleh sebuah universitas di Indonesia pada 225 manajer yang diambil secara random. Diketahui bahwa rata-rata jumlah halaman yang dibaca oleh manajer pada tahun itu adalah 921 halaman. Distribusi jumlah halaman yang dibaca manajer itu itu menyerupai distribusi normal dengan simpangan baku 68 halaman. Hitunglah interval kepercayaan 95% untuk mean jumlah halaman yang dibaca oleh manajer?

Jawab.

Diketahui :

$n = 225$

$\bar{x} = 921$
$\sigma = 68$
$\alpha = 5\% = 0{,}05$
$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad = 921 - Z_{\frac{0,05}{2}}.\frac{68}{\sqrt{225}}$
$= 921 - Z_{0,025}.\frac{68}{15}$
$= 921 - 1{,}96.\,4{,}53$
$= 921 - 8{,}8788$
$= 912{,}1212$
$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad = 921 + Z_{\frac{0,05}{2}}.\frac{68}{\sqrt{225}}$
$= 921 + Z_{0,025}.\frac{68}{15}$
$= 921 + 1{,}96.\,4{,}53$
$= 921 + 8{,}8788$
$= 929{,}8788$

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$(912{,}1212\ , 929{,}8788)$$

Jadi, interval kepercayaan $100\ (1 - \alpha)\%$ untuk μ yaitu $(912{,}1212 < \mu < 929{,}8788)$.

Contoh 3.10.

Hasil produksi PT. Mitra Kayu Sejati selama tahun 2006 berupa kayu laminating, sesuai dengan permintaan pasar adalah sebagai berikut:

Bulan	Jumlah	Bulan	Jumlah
Januari	55000	Juli	9000
Februari	13000	Agustus	11000
Maret	16000	September	6000
April	9000	Oktober	25000
Mei	13000	November	18000
Juni	32000	Desember	18000

Tabel 2.4: Produksi PT Mitra Karya Sejati

Diasumsikan bahwa hasil produksi selama tahun 2006 tersebut menyatakan sampel random yang diambil dari populasi normal dengan simpangan baku 12962.

Berapakah selang kepercayaan 95% untuk mean hasil produksi PT Mitra Kayu Sejati tersebut?

Jawab.

$$n = 12$$

$$\bar{x} = \frac{\begin{array}{c}55000 + 13000 + 16000 + 9000 + 13000 + 32000 + 9000 + 11000 \\ +6000 + 25000 + 18000 + 18000\end{array}}{12}$$

$= \frac{225000}{12}$

$= 18750$

$\sigma = 12962$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 18750 - Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{12962}{\sqrt{12}}$

$= 18750 - 1{,}96 \cdot \frac{12962}{3{,}46}$

$= 18750 - 7342{,}63$

$= 11407{,}36$

$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 18750 + Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{12962}{\sqrt{12}}$

$= 18750 + 1{,}96 \cdot \frac{12962}{3{,}46}$

$= 18750 + 7342{,}63$

$= 26092{,}63$

Jadi intervalnya $(11407{,}36 < \mu < 26092{,}63)$

Contoh 3.11.

Untuk melihat rata-rata indeks pretasi kumulatif (IPK) Insinyur maka diambil sampel random dari 25 Insinyur yang dengan mean adalah 2,9. Jika sampel random misalkan diambil dari populasi berdistribusi normal, Hitunglah batas kepercayaan bawah satu sisi 95% untuk mean IPK para Insinyur. Anggap bahwa simpangan baku populasinya 0,5.

Jawab.

Diketahui : $n = 25$

$\bar{x} = 2{,}9$

$\sigma = 0{,}5$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

Ditanyakan : Hitunglah batas kepercayaan bawah satu sisi 95% untuk mean IPK para Insinyur

$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}9 - Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{0{,}5}{\sqrt{25}}$
$= 2{,}9 - Z_{0{,}025}.\frac{0{,}5}{\sqrt{25}}$
$= 2{,}9 - 1{,}96.\frac{0{,}5}{5}$
$= 2{,}9 - 0{,}196$
$= 2{,}704$

Untuk interval bawahnya adalah 2.704

Jadi, batas kepercayaan bawah satu sisi 95% untuk mean IPK para Insinyur adalah 2.704

Contoh 3.12.

Dari suatu survey sebanyak 50 produk susu diketahui bahwa rata-rata zat pencemar dalam produk susu adalah x ̅=756 gram per hari. Tentukan interval kepercayaan 95% untuk mean banyaknya zat pencemar dalam produk susu per hari. Anggap bahwa banyaknya zat pencemar dalam produk susu berdistribusi normal dengan simpangan baku 35 gram per hari.

Jawab.

$n = 50$

$\bar{x} = 756$

$\sigma = 35$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 756 - Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 - Z_{0{,}025}.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 - 1{,}96.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 - 9{,}701$

$= 746{,}299$

$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 756 + Z_{\frac{0{,}05}{2}}.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 + Z_{0{,}025}.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 + 1{,}96.\frac{35}{\sqrt{50}}$

$= 756 + 9{,}701$

$= 765{,}701$

Jadi, intervalnya $746{,}299 < \mu < 765{,}701$

Contoh 3.13.

Untuk melihat rata-rata indeks prestasi komulatif (IPK) insinyur, maka diambil sampel random dari 25 insinyur yang dengan mean adalah 2,9. Jika sampel random dimisalkan diambil dari populasi berdistribusi normal. Hitunglah selang kepercayaan 95% untuk mean IPK para insinyur, anggap bahwa simpangan baku populasinya 0,5.

Jawab.

Diketahui : n = 25

$\bar{X} = 2{,}9$

$\sigma = 0{,}5$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$= 2{,}9 - Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{25}}$$
$$= 2{,}9 - Z_{0,025} \cdot \frac{0{,}5}{5}$$
$$= 2{,}9 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{5}$$
$$= 2{,}9 - 0{,}196$$
$$= 2{,}704$$

$$\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$= 2{,}9 + Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{25}}$$
$$= 2{,}9 + Z_{0,025} \cdot \frac{0{,}5}{5}$$
$$= 2{,}9 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{5}$$
$$= 2{,}9 + 0{,}196$$
$$= 3{,}096$$

Jadi kita peroleh interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk μ yaitu :

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$(2{,}704 < \mu < 3{,}096)$$
$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, , \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$(2{,}704\, , 3{,}096)$$

Contoh 3.14.

Seorang peneliti menyelidiki jumlah hari kerja pertahun. Jumlah hari kerja diperkirakan berdistribusi normal dengan simpangan baku diketahui 30 sebanyak 25 karyawan dipilih secara acak mempunyai rata-rata hari kerja 278 hari. Tentukan interval kepercayaan 95% untuk mean jumlah hari kerja karyawan.

Jawab.

Diketahui : n = 25

$\bar{X} = 275$

$\sigma = 30$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 278 - Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{30}{\sqrt{25}}$$

$$= 278 - Z_{0,025} \cdot \frac{30}{5}$$

$$= 278 - 1{,}96 \cdot \frac{30}{5}$$

$$= 278 - 11{,}76$$

$$= 266{,}24$$

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 278 + Z_{\frac{0,05}{2}} \cdot \frac{30}{\sqrt{25}}$$

$$= 278 + Z_{0,025} \cdot \frac{30}{5}$$

$$= 278 + 1{,}96 \cdot \frac{30}{5}$$

$$= 278 + 11{,}76$$

$$= 289{,}76$$

Jadi kita peroleh interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk μ yaitu :

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(266{,}24 < \mu < 289{,}76)$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(266{,}24 , 289{,}76)$$

2. **Kasus variansi populasi tidak diketahui**

Misalkan $\bar{x}$ dan s adalah rata-rata dan simpangan baku dari sampel random. Bila penaksir didefinisikan statistik :

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Maka $T \sim t(n-1)$. Sehingga

$$P[-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] = 1 - \alpha$$

Kalikan tiap suku dalam ketaksamaan dengan $\frac{s}{\sqrt{n}}$, lalu kurangi tiap suku dengan $\bar{x}$, dan kemudian kalikan dengan -1, maka diperoleh:

$$P[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha$$

jadi kita peroleh interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk μ yaitu:

$$(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

Contoh 3.15.

Pencatatan pengalaman kerja, dalam tahun, 7 insinyur dalam menangani proyek adalah

9,8 10,2 10,4 9,8 10,0 10,2 9,6

Carilah selang kepercayaan 95% untuk mean pengalamn kerja insinyur bila distribusinya dianggap ahmpir normal

Jawab.

$$\bar{x} = \frac{9,8 + 10,2 + 10,4 + 9,8 + 10 + 10,2 + 9,6}{7}$$

$$= \frac{70}{7} = 10$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{7-1}\begin{bmatrix}(9,8-10)^2 + (10,2-10)^2 + (10,4-10)^2 + (9,8-10)^2 + (10-10)^2 + \\ (10,2-10)^2 + (9,6-10)^2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}[0,04 + 0,04 + 0,16 + 0,04 + 0 + 0,04 + 0,16]$$

$$= \frac{1}{6} \times 0,48$$

$$= 0,08$$

$s = \sqrt{0{,}08} = 0{,}28$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\, {}^{s}\!/\!_{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\, {}^{s}\!/\!_{\sqrt{n}}$$

$$10 - t_{0,05/2}(7-1)\, {}^{0,28}\!/\!_{\sqrt{7}} < \mu < 10 + t_{0,05/2}(7-1)\, {}^{0,28}\!/\!_{\sqrt{7}}$$

$$10 - t_{0,025}(6)\, {}^{0,28}\!/\!_{\sqrt{7}} < \mu < 10 + t_{0,025}(6)\, {}^{0,28}\!/\!_{\sqrt{7}}$$

$$10 - 2{,}447(0{,}106) < \mu < 10 + 2{,}447(0{,}106)$$

$$10 - 0{,}26 < \mu < 10 + 0{,}26$$

$$9{,}74 < \mu < 10{,}26$$

Jadi interval mean pengalaman kerja insinyur $9{,}74 < \mu < 10{,}26$

Contoh 3.16.

Tabel dibawah ini menyatakan banyaknya kecelakaan yang diasuransikan selama satu bulan penuh. Jika banyaknya kecelakaan yang diasuransikan dapat didekati oleh suatu distribusi normal. Temukan interval kepercayaan 95% untuk mean jumlah kecelakaan yang diasuransikan.

10	9	10	11	16	15	8	6	18	17
12	15	14	15	9	7	8	16	14	13
20	5	18	12	14	9	10	19	6	4

Jawab.

Diketahui:

$n = 30$

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

$\bar{x} = \frac{360}{30}$

$= 12$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{30-1}(10-12)^2 + (9-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 + (16-12)^2 + (15-12)^2 +$$
$$(8-12)^2 + (6-12)^2 + (18-12)^2 + (17-12)^2 + (12-12)^2 + (15-12)^2 +$$
$$(14-12)^2 + (15-12)^2 + (9-12)^2 + (7-12)^2 + (8-12)^2 + (16-124)^2 +$$
$$(14-12)^2 + (13-12)^2 + (20-12)^2 + (5-12)^2 + (18-12)^2 + (12-12)^2 +$$
$$(14-12)^2 + (9-12)^2 + (10-12)^2 + (19-12)^2 + (6-12)^2 + (4-12)^2$$

$$= \frac{1}{30-1}(-2)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 + (6)^2 + (5)^2 + (0)^2$$
$$+ (3)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (8)^2 + (-7)^2 +$$
$$(6)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (7)^2 + (-6)^2 + (-8)^2$$

$$= \frac{1}{29}\,564$$
$$= 19{,}45$$

$$s = \sqrt{19{,}45} = 4{,}41$$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\,(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 12 - t_{\frac{0{,}05}{2}}\,(30-1)\,\frac{4{,}41}{\sqrt{30}}$$
$$= 12 - t_{0{,}025}\,29.\,\frac{4{,}41}{5{,}47}$$
$$= 12 - 2{,}045\ .\ 0{,}806$$
$$= 12 - 1{,}65$$
$$= 10{,}35$$

$$\bar{x} + t_{\alpha/2}\,(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 12 + t_{\frac{0{,}05}{2}}\,(30-1)\,\frac{4{,}41}{\sqrt{30}}$$
$$= 12 + t_{0{,}025}\,29.\,\frac{4{,}41}{5{,}47}$$
$$= 12 + 2{,}045\ .\ 0{,}806$$
$$= 12 + 1{,}65$$
$$= 13{,}65$$

Jadi, interval mean untuk jumlah kecelakaan yang diasuransikan adalah
$10{,}35 < \mu < 13{,}65$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{30-1}(10-12)^2 + (9-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 + (16-12)^2 + (15-12)^2 +$$

$$(8-12)^2 + (6-12)^2 + (18-12)^2 + (17-12)^2 + (12-12)^2 + (15-12)^2 +$$

$$(14-12)^2 + (15-12)^2 + (9-12)^2 + (7-12)^2 + (8-12)^2 + (16-124)^2 +$$

$$(14-12)^2 + (13-12)^2 + (20-12)^2 + (5-12)^2 + (18-12)^2 + (12-12)^2 +$$

$$(14-12)^2 + (9-12)^2 + (10-12)^2 + (19-12)^2 + (6-12)^2 + (4-12)^2$$

$$= \frac{1}{30-1}(-2)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 + (6)^2 + (5)^2 + (0)^2$$

$$+ (3)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (8)^2 + (-7)^2 +$$

$$(6)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (7)^2 + (-6)^2 + (-8)^2$$

$$= \frac{1}{29} \text{X} 564$$

$$= 19{,}45$$

$$s = \sqrt{19{,}45} = 4{,}41$$

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\,(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 12 - t_{\frac{0,05}{2}}\,(30-1)\,\frac{4{,}41}{\sqrt{30}}$$

$$= 12 - t_{0,025}\; 29.\;\frac{4{,}41}{5{,}47}$$

$$= 12 - 2{,}045\;.\;0{,}806$$

$$= 12 - 1{,}65$$

$$= 10{,}35$$

$$\bar{x} + t_{\alpha/2}\,(n-1)\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 12 + t_{\frac{0,05}{2}}\,(30-1)\,\frac{4{,}41}{\sqrt{30}}$$

$$= 12 + t_{0,025}\; 29.\;\frac{4{,}41}{5{,}47}$$

$$= 12 + 2{,}045\;.\;0{,}806$$

$$= 12 + 1{,}65$$

$$= 13{,}65$$

Jadi, interval mean untuk jumlah kecelakaan yang diasuransikan adalah
$10{,}35 < \mu < 13{,}65$

C. PENUTUP

Pada bagian ini berisi soal-soal latihan untuk mahasiswa dengan tujuan mempersiapkan mahasiswa untuk mengukur kemampuan/kompetensi berdasarkan tujuan yang ingin dicapai.

SOAL-SOAL:

1. Sebuah pabrik menghasilkan potongan besi yang berbentuk silinder. Sampel beberapa potongan diukur dan ternyata diameternya (dalam mm).

   8,01 8,96 8,03 8,04 8,99 8,98 8,99 8,01 8,03

   Hitunglah interval kepercayaan 99% untuk mean diameter potongan besi yang dihasilkan pabrik tersebut bila dimisalkan distribusinya hampir normal. Anggap bahwa simpangan baku populasinya 1.
2. Sampel random 8 jenis barang dipasaran dipilih secarah random .lamanya barang tersebut dipasaran mempunyai rata-rata 2.6 minggu dan simpangan baku 0.9 minggu .Buatlah selang kepercayaan 99 % untuk mean lamanya barang dipasaran. Anggap bahwa distribusi lamnya barang dipasaran adalah berdistribusi hampir normal.
3. Sampel random 25 sekretaris perusahaan mengetik rata-rata 16,3 kata permenit dengan simpangan baku 5,8 kata permenit. Anggap jumlah kata yang diketik permenit berdistribusi normal, buatlah selang kepercayaan 90% untuk mean jumlah kata yang diketik per menit oleh semua sekretaris perusahaan.
4. Pengukuran berikut memberikan waktu presentasi dalam jam seorang pemasar dalam mengenalkan suatu produk

3.4	2.5	4.8	2.9	3.6
2.8	3.3	5.6	3.7	2.8
4.4	4.0	5.2	3.0	4.8

Bila diasumsikan pengukuran menyatakan sampel random yang diambil dari populasi normal, hitunglah interval kepercayaan 95% untuk mean waktu presentasi seorang pemasar dalam mengenalkan produk. Anggap bahwa simpangan baku populasinya 0.3.

BAB IV
UJI HIPOTESIS UNTUK DISTRIBUSI NORMAL

A. PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pengujian hipotesis beserta contoh yang relevan, Pengujian untuk mean apabila variansi diketahui beserta contoh dan latihan soal, Pengujian untuk mean apabila variansi tidak diketahui beserta contoh dan latihan soal, pengujian variansi, pengujian hipotesis mean dua sampel dan uji hipotesis variansi dua sampel.

B. PENYAJIAN

1. Pengujian Hipotesis

Suatu anggapan yang mungkin benar atau tidak mengenai satu populasi atau lebih disebut hipotesis statistik. Kebenaran atau ketidakbenaran suatu hipotesis statistik akan diketahui dengan pasti apabila seluruh populasi diamati. Karena itu tidak praktis maka kita ambil sampel random dari populasi yang ingin diselidiki. Selanjutnya data sampel ini digunakan untuk mencari kenyataan yang akan mendukung hipotesis tadi. Hipotesis ditolak jika keterangan dari sampel tidak sesuai dengan hipotesis yang telah dirumuskan. Dan hipotesis diterima jika keterangan dari sampel sesuai dengan hipotesis yang dirumuskan.

Dalam pengujian hipotesis, setiap hipotesis yang ingin diuji dinyatakan dengan hipotesis nol H_o dan hipotesis alternatif H_1. Jika hipotesis H_o ditolak maka hipotesis alternatif H_1 diterima, dan sebaliknya. Hipotesis nol maupun hipotesis alternatif dapat berupa sederhana (*simple*) atau gabungan (*composite*). Jika suatu hipotesis menspesifikasikan nilai dari parameter dari distribusi maka hipotesis tersebut hipotesis sederhana. Jika suatu hipotesis tidak menspesifikasikan nilai dari parameter dari distribusi maka dikatakan hipotesis tersebut disebut hipotesis gabungan.

Contoh 4.1.1:

Seorang pengusaha ingin melakukan pengujian hipotesis terhadap mesin yang ditawarkan oleh perusahaan mesin. Pengusaha tersebut akan menentukan apakah mesin yang ditawarkan lebih banyak menghasilkan produk dari pada mesin lama yang menghasilkan 500 unit per 8 jam.

Jawab:

H_0 : Mesin baru sama dengan mesin lama dalam menghasilkan produk.

H_1 : Mesin yang baru lebih banyak menghasilkan produk.

Himpunan bagian dari ruang sampel yang bersesuaian dengan penerima H_0 disebut dengan daerah penerimaan. Sedangkan himpunan bagian dari ruang sampel yang bersesuaian dengan penolak H_0 disebut daerah kritis. Bilangan pengamatan yang memisahkan kedua daerah tersebut disebut nilai kritis. Penolakan hipotesis nol padahal hipotesis itu benar disebut galat jenis I.

Contoh 4.1.2:

Sebuah pabrik sepatu di Bandung ingin menguji hipotesis bahwa 70% masyarakat Bandung akan membeli produknya.

Jelaskan bagaimana pabrik tersebut dapat melakukan

(a) Galat jenis I

(b) Galat jenis II

Jawab :

(a) Simpulkan bahwa kurang dari 70% masyarakat Bandung akan membeli produknya, padahal sesungguhnya 70% atau lebih masyarakat Bandung membeli produk tersebut.

(b) Simpulkan bahwa paling sedikit 70% masyarakat Bandung akan membeli produknya, padahal sesungguhnya kurang dari 70% dari masyarakat Bandung akan membeli produk tersebut.

Dalam pengujian hipotesis statistik terdapat empat kemungkinan keadaan yang menentukan apakah keputusan kita benar atau keliru. keempat hal ini disajikan di tabel 4.1

	H_0 benar	H_0 salah
Terima H_0	Keputusan benar	Galat jenis II
Tolak H_0	Galat jenis 1	Keputusan benar

Tabel 4.1 Kemungkinan keadaan yang menentukan kebenaran keputusan

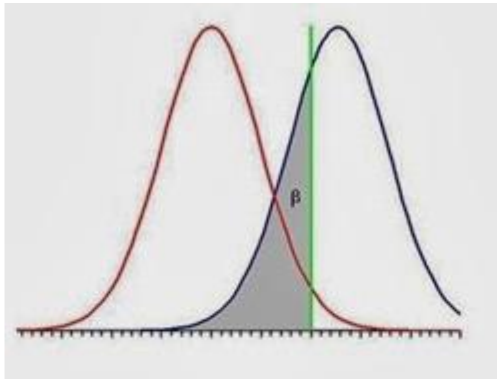
Probabilitas melakukan galat jenis I, juga disebut taraf keberartian, dinyatakan dengan α .

$$\alpha = P \text{ (galat jenis I)}$$

Kadang-kadang taraf keberartian dinamakan juga ukuran daerah kritis. sedangkan probabilitas melakukan galat jenis II, dinyatakan β .

$$\beta = P \text{ (galat jenis II)}$$

Untuk suatu ukuran sampel tertentu, tidak mungkin untuk meminimumkan kedua kesalahan tadi secara simultan.



gambar 4.1 : Hubungan antara H_0 dan H_1

Untuk mengatasi masalah tersebut, Meyman dan Pearson menggunakan suatu pendekatan dengan menjaga probabilitas kesalahan jenis I cukup rendah, seperti 0,1 atau 0,5 dan kemudian berusaha meminimumkan kesalahan jenis II sebesar mungkin.

Suatu pengertian yang amat penting yang berkaiatan dengan kedua probabilitas galat ini adalah pengertian kekuatan pengujian *(power of the test)* yaitu kemungkinan untuk tidak terkait dengan kesalahan tipe II. Kekuatan pengujian suatu uji hipotesis, dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, ialah probabilitas menolak H_0 bila nilai parameter adalah θ . Untuk hipotesis sederhana

H_0 : $\theta = \theta_0$

H_1 : $\theta = \theta_1$

maka kita mempunyai kekuatan pengujian

$$\pi(\theta) = \begin{cases} P\ (galat\ jenis\ II) = \alpha,\ jika\ \theta = \theta_0 \\ 1 - P\ (galat\ jenis\ II) = 1 - \beta,\ jika\ \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Sedangkan untuk hipotesis gabungan

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega - \Omega_0$$

Maka daerah krittis adalah

$$\alpha = \max_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta)$$

dan jika sebenarnya θ maka dalam $\Omega - \Omega_0$, maka kekuatan pengujian

$$\pi(\theta) = 1 - P(galat\ jenis\ II)$$

Setiap uji hipotesis statistik dengan hipotesis alternatif yang berpihak satu seperti

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{atau} \qquad H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0 \qquad\qquad\qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

disebut uji ekasisi. Daerah kritis untuk hipotesis alternatif $\theta > \theta_0$ terletak di sisi kanan distribusi uji Statistik, sedangkan daerah kritis untuk hipotesis tandingan $\theta < \theta_0$ terletak di sisi kiri disebut uji statistik.

Setiap uji hipotesis statistik dengan hipotesis tandingan yang berpihak dua seperti:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_0 : \theta \neq \theta_0$$

Disebut uji dwisisi.

Daerah kritis untuk hipotesis tandingan $\theta \neq \theta_0$ terbagi atas dua bagian, sering dengan probabilitas sama yang diberikan pada setiap sisi atau ujung dari distribusi uji statistik tersebut.

Untuk menguji hupotesis berbentuk $H_0 : \theta = \theta_0$, prosedurnya sebagai berikut:

1. Tulislah hipotesis nol $H_0 : \theta = \theta_0$
2. Pilih hipotesis tandingan H_1 tandingan yang sesuai dari salah satu $\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, dan $\theta \neq \theta_0$.
3. Pilih taraf keberartian α .
4. Pilih uji statistik yang sesuai dan tentukan daerah kritisnya.
5. Hitunglah nilai uji statistik dari data sampel.
6. Kesimpulan: Tolak H_0 bila uji statistik tersebut mempunyai nilai dalam daerah kritis, sebaliknya terima H_0 .

2. Pengujian untuk mean (variansi diketahui)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel random dari $N(\mu, \sigma^2)$ dimana σ^2 diketahui. Bila $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Maka :

1. Hipotesis Statistika

   $H_0 : \mu = \mu_0$

   $H_1 : \mu > \mu_0$

   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $z_0 > z_\alpha$

2. Hipotesis Statistika

   $H_0 : \mu = \mu_0$

   $H_1 : \mu < \mu_0$

   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $z_0 < -z_\alpha$

3. Hipotesis Statistika

   $H_0 : \mu = \mu_0$

   $H_1 : \mu \neq \mu_0$

   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $z_0 < -z_{\alpha/2}$ atau $z_0 > z_{\alpha/2}$

Contoh 4.2

Sampel random ukuran 10 baterai android menunjukkan rata-rata berumur 8,7 jam. Apakah ini menunjukkan bahwa mean umur baterai android lebih dari 8 jam? Gunakan $\alpha = 0{,}05$ dan anggap bahwa distribusi umur baterai android berdistribusi normal dengan simpangan bakunya 1,06 jam.

Jawab:

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 8$

$H_1 : \mu > 8$

Disini $n = 10$; $\bar{x} = 8{,}7$; $\mu_0 = 9$; dan $\sigma = 1{,}06$. Sehingga,

$Z_0 = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

$= \frac{8,7-8}{1,06/\sqrt{10}}$

$= \frac{0,7}{1,06/3,16}$

$= \frac{0,7}{0,33}$

= 2,121

Di lain pihak $\alpha = 0,05$ sehingga dari tabel diperoleh $Z_{0,05} = 1,645$

Karena $Z_0 = 2,121 > 1,645 = Z_{0,05}$ maka tolak H_0.

Kesimpulannya bahwa mean umur baterai android ini melebihi 8 jam.

Contoh 4.2

Suatu proyek perbaikan jalan dan menurut pembuatnya diperkirakan bertahan rata-rata 10 tahun dengan simpangan baku 1,5 tahun. Ujilah hipotesis bahwa $\mu = 10$ tahun lawan tandingannya bahwa $\mu \neq 10$ bila sampel random 15 jalan diuji dan ternyata rata-rata daya tahannya 9 tahun. Gunakan $\alpha = 0,01$ dan anggap bahwa distribusi daya tahan jembatan berdistribusi normal.

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu \neq 10$

Disini $n = 15$, $\bar{X} = 9$, $\mu_0 = 10$ dan $\sigma = 1,5$

$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$z_0 = \frac{9 - 10}{1,5/\sqrt{15}}$

$z_0 = -2,584$

Dilain pihak, $\alpha = 0,01$ sehingga dari table diperoleh

$z_{0,05} = 2,575$

Karena $z_0 = -2,584 < -2,575 = z_{0,005}$ maka ditolak H_0. Kesimpulannya bahwa mean daya tahan jalan tidak sama dengan 10 tahun.

Contoh 4.3

PT Djoy ingin mengetahui lamanya dipasaran sejenis susu yang diproduksi dengan mensurvei ketoko sebanyak 16 toko dan mendapatkan rata-rata lama dipasaran 12,8 bulan. Ujilah hipotesis bahwa $\mu = 12$ lawan tandingannya bahwa $\neq 12$. Gunakan $\alpha = 0{,}05$ dan anggap bahwa distribusi lamanya dipasaran susu yang diproduksi berdistribusi normal dengan simpangan baku 0,10 bulan.

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 12$

$H_1 : \mu \neq 12$

Disini $n = 16$, $\bar{X} = 12{,}8$, $\mu_0 = 12$ dan $\sigma = 0{,}10$

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{12{,}8 - 12}{0{,}10/\sqrt{16}}$$

$$z_0 = 32$$

Dilain pihak, $\alpha = 0{,}05$ sehingga dari table diperoleh

$z_{0,025} = 1{,}96$

Karena $z_0 = 32 > 1{,}96 = z_{0,025}$ maka ditolak H_0. Kesimpulannya bahwa mean lamanya susu dipasaran tidak sama dengan 12 bulan.

Contoh 4.4

Suatu sampel random dengan 5 perhiasan dengan kadar karat rata-rata 20,5 gram. Ujilah hipotesis bahwa $\mu = 18$ gram lawan tandingannya bahwa $\mu > 18$ gram lawan tandingannya bahwa $\mu > 18$ gram. Gunakan $\alpha = 0{,}05$ dan anggap bahwa distribusi kadar karat berdistribusi normal dengan simpangan baku 2,4 gram.

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 18$

$H_1 : \mu \ > 18$

Disini $n = 5$, $\bar{X} = 20{,}5$, $\mu_0 = 18$ dan $\sigma = 2{,}4$

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{20{,}5 - 18}{2{,}4/\sqrt{5}}$$

$$z_0 = 2{,}329$$

Dilain pihak, $\alpha = 0{,}05$ sehingga dari table diperoleh

$$z_{0,05} = 1{,}645$$

Karena $z_0 = 2{,}329 > 1{,}645 = z_{0,05}$ maka ditolak H_0. Kesimpulannya bahwa mean kadar karat sama dengan 18.

Contoh 4.5

tingkat pembakaran sampah di TPS sedang diselidiki. Sebuah sampel random yang besarnya $n = 26$ diambil. Ternyata sampel tersebut memiliki rata-rata tingkat pembakaran yang diperoleh adalah 51,75. Ujilah hipotesis bahwa mean tingkat pembakaran adalah 50. gunakan $\alpha = 0{,}01$ anggap bahwa distribusi tingkat pembakaran berdistribusi normal dengan variansi 9.

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 50$

$H_1 : \mu \ \neq 50$

Disini $n = 26$, $\bar{X} = 51{,}75$, $\mu_0 = 50$ dan $\sigma = 3$

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{51{,}75 - 50}{3/\sqrt{26}}$$

$$z_0 = 2{,}976$$

Dilain pihak, $\alpha = 0{,}01$ sehingga dari table diperoleh

$$z_{0,005} = 2{,}575$$

Karena $z_0 = 2{,}976 > 2{,}575 = z_{0{,}005}$ maka ditolak H_0. Kesimpulannya bahwa tingkat pembakaran sampah di TPS tidak sama dengan 50.

Contoh 4.6

Suatu pabrik susu merk D-Jose melakukan pengecekan terhadap produk mereka, apakah rata-rata berat bersih satu kaleng susu bubuk yang di produksi dan di pasarkan masih tetap 400 gram atau sudah lebih kecil dari itu. Dari data sebelumnya di ketahui bahwa simpangan baku bersih per kaleng sama dengan 125 gram. Dari sample 50 kaleng yang di teliti, di peroleh rata-rata berat bersih 375 gram. Dapatkah di terima bahwa berat bersih rata-rata yang di pasarkan tetap 400 gram? Ujilah dengan taraf nyata 5% !

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 400$

$H_1 : \mu < 400$

Disini $n = 50, \bar{X} = 375, \mu_0 = 400$ dan $\sigma = 125$

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{375 - 400}{125/\sqrt{50}}$$

$$z_0 = -1{,}414$$

Dilain pihak, $\alpha = 5\% = 0{,}05$ sehingga dari table diperoleh

$z_{0{,}05} = 1{,}645$

Karena $z_0 = -1{,}414 \geq -1{,}645 = z_{0{,}05}$ maka diterima H_0. Kesimpulannya bahwa mean susu bubuk merk D-Jose per kaleng yang dipasarkan sama dengan 400 gram.

Contoh 4.7

Sebuah perusahaan alat olahraga mengembangkan jenis batang pancing sintetik, yang dikatakan mempunyai kekuatan dengan rata-rata 9 kg dengan alternative lebih besar dari 9 kg bila suatu sample 81 batang pancing itu setelah dites memberikan kekuatan rata-rata 9,4 kg dengan simpangan bakunya 2 gunakan $\alpha = 5\%$

Jawab :

Hipotesis:

$H_0 : \mu = 9$

$H_1 : \mu > 9$

Disini $n = 81$, $\overline{X} = 9{,}4$, $\mu_0 = 9$ dan $\sigma = 2$

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$z_0 = \frac{9{,}4 - 9}{2/\sqrt{81}}$$

$$z_0 = 1{,}818$$

Dilain pihak, $\alpha = 5\% = 0{,}05$ sehingga dari tabel diperoleh

$z_{0,05} = 1{,}645$

Karena $z_0 = 1{,}818 > 1{,}645 = z_{0,05}$ maka ditolak H_0. Kesimpulannya bahwa mean kekuatan pancing melebihi 9 kg.

3. Pengujian untuk mean (variansi tidak diketahui)

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah suatu sampel random dari $N(\mu, \sigma^2)$ di mana σ^2 tidak diketahui. Bila

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Maka :

1. Hipotesis statistika

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Dengan taraf keberartian a, H_0 ditolak bila $t_0 > t_a(n-1)$.

2. Hipotesis statistik

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Dengan taraf keberartian a, H_0 ditolak bila $t_0 < t_a(n-1)$.

3. Hipotesis statistik

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Dengan taraf keberartian a, H_0 ditolak bila $t_0 < -t_{a/2}(n-1)$ atau $t_0 > t_{a/2}(n-1)$.

Contoh 4.8

Diketahui penggunaan handphone oleh remaja dalam sehari rata-rata 16 jam/hari. Bila sampel random 10 orang remaja usia 14-20 tahun. Dan ternyata rata-rata penggunaan handphone oleh remaja usia 14-20 tahun 12 jam/hari dengan simpangan baku 7,8 jam/hari. Apakah ini menunjukkan pada taraf keberartian 0,05 bahwa pengguna handphone rata-ratanya kurang dari 16 jam/hari? Anggap bahwa banyaknya penggunaan handphone dalam sehari berdistribusi normal.

Jawab :

Hipotesis :

H0 : μ = 16

H1 : μ < 16

n = 10

μ0 = 16

$\bar{x}$ = 12

s = 7,8

ν = n – 1

= 10 – 1

= 9

t0 = $\frac{\bar{x} - \mu 0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

$= \frac{12-16}{\frac{7,8}{\sqrt{10}}}$

$= \frac{-4}{2,47}$

= -1,619

Dilain pihak, α = 0,05 sehingga dari tabel diperoleh t0,05 (9) = 1,833

Karena –t0,05 (9) < t0 < t0,05 (9) maka terima H0. Kesimpulan bahwa mean banyaknya penggunaan handphone dalam jam/hari sama dengan 16 jam/hari.

Contoh 4.9

Di sebuah area perkebunan holtikultura, dibuat uji coba penanaman melon. Ada enam area yang masing-masing seluas $\frac{1}{2}$ ha. Produksi dimasing-masing area sebesar 1,4 ton, 1,8 ton, 1,1 ton, 1,9 ton, 2,2 ton, dan 1,2 ton. Dengan α = 5%, apakah angka-angka tersebut mendukung hipotesis bahwa rata-rata produksi melon per $\frac{1}{2}$ ha adalah 1,5 ton.

Jawab:

Hipotesis:

H0 : μ = 1,5 ton

H1 : μ ≠ 1,5 ton

Disini n = 6

$\bar{x} = \frac{1,4 + 1,8 + 1,1 + 1,9 + 2,2 + 1,2}{6}$

$= \frac{9,6}{6} = 1,6$

$\mu_0 = 1,5$

$s = 0,4$

$$s^2 = \frac{1}{5}\left(\left(1{,}6-1{,}4\right)^2 + \left(1{,}6-1{,}8\right)^2 + \left(1{,}6-1{,}1\right)^2 + \left(1{,}6-1{,}9\right)^2 + \left(1{,}6-2{,}2\right)^2 + \left(1{,}6-1{,}2\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(0{,}2\right)^2 + \left(-0{,}2\right)^2 + \left(0{,}5\right)^2 + \left(-0{,}3\right)^2 + \left(-0{,}6\right)^2 + \left(0{,}4\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0.04 + 0.04 + 0.25 + 0.09 + 0.36 + 0.16\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0{,}94\right))$$

$$= 0{,}188$$

$$s = 0{,}4336$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1{,}6 - 1{,}5}{0{,}4336/\sqrt{6}}$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}4336/2{,}4495}$$

$$= 0{,}1 \times \frac{2{,}4495}{0{,}4336}$$

$$= \frac{0{,}24495}{0{,}4336} = 0{,}565$$

Di pihak lain, α = 0,05 sehingga dari tabel diperoleh $t_{0,025}(5) = 2{,}5706$

Karena $-t_{0,025}(5) < t_0 < t_{0,025}(5)$ maka terima H0

Kesimpulannya bahwa rata-rata produksi melon per $\frac{1}{2}$ ha adalah 1,5 ton.

Contoh 4.10

Waktu rata-rata yang diperlukan mahasiswa untuk mendaftar ulang pada semester ganjil disuatu perguruan tinggi adalah 20 menit. Suatu prosedur pendaftaran baru yang menggunakan mesin antrian sedang dicoba. Bila sampel 12 mahasiswa memerlukan waktu pendaftaran rata-rata 8 menitdengan simpangan baku 3,2 menit dengan sistem baru tersebut, ujian hipotesis yang menyatakan bahwa rata-rata sekarang tidak sama dengan 20 menit. Gunakan α = 5%.

Jawab:

Hipotesis :

H0 : μ = 20

H1 : μ ≠ 20

Disini $n = 12,\ \bar{x} = 8,\ s = 3{,}2\ menit\ \ dan\ \ \mu_0 = 20$

Sehingga

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{8 - 20}{3{,}2/\sqrt{12}}$$

$$= \frac{-12}{3{,}2/3{,}464}$$

$$= \frac{-12 \times 3{,}464}{3{,}2}$$

$$= \frac{41{,}568}{3{,}2} = -12{,}9$$

Di lain pihak α = 0,05 sehingga dari tabel diperoleh

$t_{0,025}(11) = 2,2010$

Karena $t_0 = -12,9 < - t_{\alpha/2} = -2,2010$

Maka H0 ditolak.

Kesimpulannya bahwa mean lamanya pendaftaran studi dengan menggunakan antrian tidak sama dengan 20 menit

4. Pengujian untuk variansi

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah suatu sample random dari $N(\mu, \sigma^2)$, Bila

$$V_n = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Maka:

1. Hipotesis sistematik
   $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
   $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $v_0 > \chi^2_{\alpha}(n-1)$
2. Hipotesis sistematik
   $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
   $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $v_0 > \chi^2_{\alpha-1}(n-1)$
3. Hipotesis sistematik
   $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
   $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
   Dengan taraf keberartian α, ditolak bila $v_0 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ atau $v_0 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Contoh 4.11

Suatu perusahaan komputer menyatakan waktu tunggu pesanan semua komputernya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 0,5 bulan. Bila sampel random 19 pembeli komputer tersebut menghasilkan simpangan baku waktu tunggu 0,9 bulan, apakah anda setuju bahwa variansi waktu tunggu pesanan semua mobilnya adalah lebih dari 0,72 bulan

Gunakan taraf keberartian 0,2

Jawab : Hipotesis :

$$H_0 : \sigma^2 = 0{,}72$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0{,}72$$

Disini n=19, σ^2= 0,72 dan S^2=0,81 sehingga

$$V_0 = \frac{(19-1)0{,}81}{0{,}72} = 20{,}25$$

Dilain pihak, $\alpha =$0,2 sehingga dari tabel diperoleh

$$X^2_{0,2}(18) = 22{,}760$$

Karena $V_0 = 20{,}25 < 22{,}760 = X^2_{0,2}(18)$ maka diterima H0. Kesimpulannya bahwa variansi waktu tunggu pesanan komputer lebih kecil dari 0,72.

Contoh 4.12

Untuk mengetahui variansi ketebalan buku pada suatu percetakan, diambil 8 sampel random dan setelah dihitung ternyata menghasilkan variansi sampel s2=0,92. Apabila ketebalan buku dimisalkan berdistribusi normal. Ujilah hipotesis bahwa variansi ketebalan semua buku lebih dari 0,81. Gunakan taraf keberartian 0,01.

Jawab :

Hipotesis :

$$H_0 : \sigma^2 = 0{,}81$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0{,}81$$

Disini n=8, σ^2= 0,81 dan S^2= 0,92 sehingga

$$V_0 = \frac{(8-1)92}{0{,}81} = \frac{6{,}44}{0{,}81} = 7{,}95$$

Dilain pihak, $\alpha = 0{,}01$ sehingga dari tabel diperoleh $X^2_{0,01}(7) = 18{,}475$

Karena $V_0 = 7{,}95 < 18{,}475 = X^2_{0,01}(7)$ maka terima H0. Kesimpulannya bahwa variansi ketebalan semua buku lebih dari 0,81

Contoh 4.13

Proses pengisian air mineral kedalam botol oleh mesin, paling tinggi mencapai variansi 0,2. Dipilih 30 buah botol secara random dan isinya ditakar , ternyata sampel ini menghasilkan simpangan baku 0,3 Apabila isi botol diasumsikan berdistribusi normal, ujilah hipotesis bahwa variansi semua isi botol air mineral lebih dari 0,2. Gunakan taraf keberartian $\alpha = 0{,}3$.

Jawab : Hipotesis :

$$H_0 : \sigma^2 = 0{,}2$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0{,}2$$

Disini n=30, σ_0^2=0,2 dan S^2=0,3 sehingga

$$V_0 = \frac{(30-1)0{,}3}{0{,}2} = 43{,}5$$

Dilain pihak, $\alpha =$0,3 sehingga dari tabel diperoleh

$X^2_{0,3}(29) = 32{,}461.$

Karena $V_0 = 43{,}5 > 32{,}461 = X^2_{0,3}(29)$ maka tolak H0.

Kesimpulannya bahwa variansi semua isi botol air mineral lebih dari 0,2.

Contoh 4.14

Penjual buah jeruk menyatakan bahwa selama sebulan dapat menjual buah jeruknya dengan simpangan baku 0,6 kg. Bila diambil sampel sebanyak 12 penjual buah jeruk dan dapat terjual buah jeruk dengan simpangan baku 1,1 kg, ujilah hipotesis bahwa simpangan baku semua penjual buah jeruk lebigh dari 0,6 kg. Gunakan taraf keberartian $\alpha = 0{,}05$. Anggap bahwa jumlah buah jeruk yang dijual berdistribusi hampir normal.

Jawab : Hipotesis :

$$H_0 : \sigma^2 = 0{,}36$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > 0{,}36$$

Disini $n = 12$, $\sigma^2 = 0{,}36$ dan $S^2 = 1{,}21$ sehingga

$$V_0 = \frac{(12-1)1{,}21}{0{,}36} = 36{,}97$$

Dilain pihak, $\alpha = 0{,}05$ sehingga dari tabel diperoleh

$$X^2_{0,05}(11) = 19{,}675$$

Karena $V_0 = 36{,}97 > 19{,}675 = X^2_{0,05}(11)$ maka tolak H0.

Kesimpulannya bahwa variansi semua isi botol air mineral lebih dari 0,36.

5. Uji Hipotesis Mean Dua Sampel

Uji Hipotesis Mean Dua Sampel (Variansi diketahui)

Misalkan $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$, menyatakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_1 tidak diketahui dan variansi σ_1^2 diketahui. Dan $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$, menyatakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_2 tidak diketahui dan variansi σ_2^2 diketahui. Asumsikan bahwa $\{x_{1i}\}$ dan $\{x_{2i}\}$ adalah bebas.

Untuk menguji hipotesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Digunakan uji statistik

$$Z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Yaitu tolak H_0 jika $Z_0 > Z_{a/2}$ dan $Z_0 > -Z_{a/2}$

Untuk menguji hipotesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Digunakan uji statistik

$$Z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Yaitu tolak H_0 jika $Z_0 > Z_\alpha$

Untuk menguji hipotesis

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 > \mu_2$

Digunakan uji statistic

$$Z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Yaitu tolak H_0 jika $Z_0 < -Z_\alpha$

Contoh 4.15

Sebuah penelitian meneliti apakah rata-rata kadar nikotin rokok jarum lebih tinggi dibandingkan rokok wismilak. Diambil sampel secara random, 10 batang rokok jarum dan 8 batang rokok wismilak. Diperoleh $\overline{x_1} = 23{,}1\,mg$ dengan $\sigma_1^2 = 1{,}5$ dan $\overline{x_1} = 20{,}0\,mg$ dengan $\sigma_1^2 = 1{,}7$. Ujilah hipotesis $\begin{matrix} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{matrix}$ dengan menggunakan $\alpha = 0{,}05$!

Jawab: Hipotesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

Di sini

$n_1 = 10$ $\quad \overline{x_1} = 23{,}1$ $\quad \sigma_1^2 = 1{,}5$

$n_2 = 8$ $\quad \overline{x_2} = 20{,}0$ $\quad \sigma_2^2 = 1{,}7$

Sehingga $$Z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z_0 = \frac{23{,}1 - 20{,}0}{\sqrt{\frac{1{,}5}{10} + \frac{1{,}7}{8}}}$$

$$= \frac{3{,}1}{\sqrt{0{,}3625}} = 5{,}15$$

Di lain pihak, $\alpha = 0{,}05$ sehngga dari tabel diperoleh $Z_{0,05} = 1{,}645$

Karena $Z_0 = 5{,}15 > 1{,}645 = Z_{0,05}$ maka tolak H_0. Kesimpulannya bahwa rata-rata kadar nikotin rokok jarum lebih tinggi daripada rokok wismilak.

Uji Hipotesis Mean dua Sampel (variansi tidak diketahui tetapi sama)

Misalkan $X_{I1,} X_{I2}, ..., X_{In}$ menyatakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_1 tidak diketahui dan variansi σ_1^2

Tidak diketahui. Dan $X_{21,} X_{22}, ..., X_{2n}$ menyatakan sampel random yang diambil dari suau populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_2 tidak diketahui dan variansi σ_2^2 tidak diketahui. Asumsikan bahwa $\{X_{1i}\}$ dan $\{X_{2i}\}$ adalaah bebas. Asumsikan juga bahwa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Untuk menguji hipotesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

digunakan uji statistik

$$T_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

yaitu tolak H_0 jika $T_0 > T_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

$T_0 < -T_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

Dimana $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

Untuk menguji hipotesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

digunakan uji statistik

$T_0 = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

yaitu tolak H_0 jika $T_0 > T_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$

Untuk menguji hipotesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

digunakan uji statistik

$T_0 = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

yaitu tolak H_0 jika $T_0 < -T_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

Contoh 4.16

Diketahui data yang dihasilkan $n_1 = 10, n_2 = 10, \overline{x_1} = 80, \overline{x_2} = 75, s_1^2 = 4,$ dan $s_2^2 = 4{,}5$. Ujilah hipotesis $\begin{matrix} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{matrix}$ dengan menggunakan $\alpha = 0{,}05$!

Jawab: Hipotesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Di sini

$n_1 = 10$	$\overline{x_1} = 80$	$s_1^2 = 4$
$n_2 = 10$	$\overline{x_2} = 75$	$s_2^2 = 4{,}5$

Sehingga, $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$$S_p^2 = \frac{(10-1)4 + (10-1)4,5}{10+10-2}$$

$$= \frac{36 + 40,5}{18}$$
$$= 4,25$$

$$t_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$t_0 = \frac{80 - 75}{4,25\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}}$$

$$= \frac{5}{4,25 \times 0,45}$$
$$= 2,614$$

Di lain pihak, $\alpha = 0,05$ sehingga dari tabel diperoleh $t_{0,025}(18) = 2,1009$

Karena

$t_0 > t_{0,025}(18)$
$t_0 = 2,614 > t_{0,025}(18) = 2,1009$

Maka H_0 ditolak. Kesimpulannya bahwa $\mu_1 \neq \mu_2$

6. Uji Hipotesis Mean Dua Sampel

Misalkan $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$ menyatakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_1 tidak diketahui dan variansi σ_1^2

Tidak diketahui. Dan $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$ menyatakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_2 tidak diketahui dan variansi σ_2^2 tidak diketahui.

Untuk menguji hipotesis

$\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (kedua populasi homogen)

$\mathrm{H_1}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (kedua populasi tidak homogen)

Digunakan uji statistic

$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Yaitu tolak $\mathrm{H_0}$ jika $f_0 < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ atau $f_0 > f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Dimana $i = 1{,}2$

$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X})^2$

Untuk menguji hipotesis

$\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Digunakan uji statistik

$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Yaitu tolak $\mathrm{H_0}$ jika $f_0 < f_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Untuk menguji hipotesis

$\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\mathrm{H_0}: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Digunakan uji statistik

$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Yaitu tolak $\mathrm{H_0}$ jika $f_0 > f_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Contoh 4.17

Seseorang berpendapat bahwa rata-rata jam kerja buruh di daerah A dan B sama dengan alternatif A lebih besar dari pada B. Untuk itu, di ambil sampel di kedua daerah, masing-

masing 9 dan 11 simpangan baku 8 dan 12 jam per minggu. Ujilah pendapat tersebut dengan taraf nyata 5% ! Untuk Varians / simpangan baku kedua populasi sama besar!

Jawab :

Diketahui :

$n_1 = 9$

$n_2 = 11$

$s_1^2 = 8$

$s_2^2 = 12$

$\alpha = 5\% = 0,05$

Hipotesis :

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

$= \frac{8}{12}$

$= 0,67$

$f_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1) = f_{0,05}(9 - 1, 11 - 1)$

$= f_{0,05}(8,10)$

$= 3,07$ (dari tabel)

Karena $f_0 < f_{0,05}(8,10)$ maka H_0 diterima

C. PENUTUP

Pada bagian ini berisi soal-soal latihan untuk mahasiswa dengan tujuan mempersiapkan mahasiswa untuk mengukur kemampuan/kompetensi berdasarkan tujuan yang ingin dicapai.

SOAL-SOAL:

1. sampel acak catatan 50 kematian kelinci di suatu peternakan ternama di USA selama tahun lalu menunjukkan rata-rata usia mereka 8,4 tahun. Andaikan simpangan bakunya 0,5 tahun, apakah ini menunjukkan bahwa rata-rata usia kelinci sekarang ini lebih dari 8 tahun? Gunakan taraf keberartian 0,05.
2. Sebuah perusahaan memproduksi lampu listrik yang umurnya menghampiri sebaran normal dengan nilaitengah 800 jam dan simpangan baku 40 jam. Ujilah hipotesis bahwa $\mu = 800$ jam lawan alternatifnya $\mu \neq 800$ jam, bila suatu contoh acak 30 lampu menghasilkan umur rata-rata 788 jam. Gunkan taraf keberartian 0.04.
3. Manajer pabrik yoghurt tertarik dalam membandingkan pelaksanaan dua proses produksi yang berbeda dalam pabriknya. Proses produksi 1 secara relatif baru, ia mengira bahwa hasil proses produksi ini jumlah kasus setiap hari adalah lebih besar dari jumlah kasus yang dihasilkan oleh proses produksi 2. Data enambelas hari yang dipilih secara random untuk masing-masing proses produksi, diperoleh $\overline{x_1} = 98{,}7$ kasus per hari dan $\overline{x_2} = 95{,}2$ kasus per hari. Berdasarkan pengalaman dengan pengoperasian tipe ini diketahui bahwa $\sigma_1^2 = 48$ dan $\sigma_2^2 = 16$. Ujilah hipotesis

   $H_0: \mu_1 = \mu_2$

   $H_1: \mu_1 > \mu_2$ dengan menggunakan $\alpha = 0.05$!
4. Diketahui data yang dihasilkan $n_1 = 12, n_1 = 12,\ \overline{x_1} = 8.21,\ \overline{x_2} = 9.41\ , s_1^2 = 2.2$, dan $s_2^2 = 1.2$. Ujilah hipotesis

   $H_0: \mu_1 = \mu_2$

   $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ Dengan menggunakan $\alpha = 0.05$
5. Seseorang berpendapat bahwa rata-rata jam kerja buruh di daerah A dan B sama dengan alternatif A lebih besar dari pada B. Untuk itu, di ambil sample di kedua daerah, masing-masing 10 dan 13 simpangan baku 9 dan 16 jam per minggu. Ujilah pendapat tersebut dengan taraf nyata 5% ! Untuk Varians/ simpangan baku kedua populasi sama besar!

DAFTAR PUSTAKA

Abdul Taram., 2006, Teori Peluang, FKIP UAD ., Yogyakarta.

Bain, L. J. dan Engelhard, M., 1992, Introduction To Probability And Mathematical Statistics, Duxbury Press, Belmont, California.

Devore, J. L. dan Berk,K.N., 2012, Modern Mathematical Statistics With Application, Springer New York.

Herrhyanto, N. dan Gantini, T., 2009, Pengantar Statistika Matematika, Yrama Widya., Bandung.

Purwanto (2010). *Statistika Untuk Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Suparman., 2013, Teori Peluang, JPMIPA FKIP UAD Press., Yogyakarta.

Suparman., 2013, Statistika Matematika, JPMIPA FKIP UAD Press., Yogyakarta.