Modul

Kajian Matematika SMA 1

Berbasis Pedagogical Content Knowledge

Bintang Wicaksono, M.Pd.
Nendra Mursetya Somasih Dwipa, M.Sc

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT atas curahan kasih sayang-Nya juga atas segala kemudahan dan kelancaran yang diberikan-Nya, sehingga Modul ini dapat terselesaikan dengan baik.

Penulisan modul ini di samping sebagai produk penelitian dosen pemula yang dibiayai Ristekdikti Anggaran 2019, juga sebagai modul pegangan mahasiswa tentang Kajian Matematika SMA 1, agar mahasiswa lebih mengenal dan memahami tentang materi matematika SMA 1.

Modul ini terselesaikan atas bantuan banyak orang, yang karenanya kami ingin menyampaikan penghargaan dan terima kasih kepada:

1. Yang terhormat Kementerian Riset dan Teknologi Republik Indonesia yang telah memberikan kesempatan kepada kami, serta memberikan dana untuk mendukung penulisan Modul ini
2. Yang terhormat Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas PGRI Yogyakarta yang telah memberikan pengarahan dalam pelaksanaan penelitian dan penyusunan Modul ini.
3. Terima kasih untuk UPY Press yang telah memberi kesempatan pada kami untuk menerbitkan Modul ini.
4. Orangtua, saudara, kerabat, serta teman-teman yang telah memberikan motivasi pada kami untuk selalu berusaha sebaik-baiknya dalam penyelesaian penulisan Modul ini.
5. Pihak-pihak lain yang telah membantu penyelesaian penulisan Modul ini yang tidak dapat dituliskan satu persatu.

Kepada semua pihak di atas, semoga menjadi amal jariah dan mendapatkan imbalan yang melimpah dari Allah SWT, serta semoga Allah Swt. selalu melimpahkan lindungan, rahmat, dan hidayah bagi kita semua.

Tiada gading yang tak retak. Kami menyadari bahwa karya kami masih jauh dari sempurna. Karena itu kami mohon maaf atas segala kekurangan dalam penulisan ini. Kami pun berharap saran dan kritik dari pembaca dapat membuat Modul ini menjadi lebih baik.

Demikian penulisan modul ini, semoga menjadi langkah awal untuk menyusun dan mengembangkan modul berikut untuk Mata Kuliah Kajian Matematika SMA 1. Semoga bermanfaat bagi civitas akademika Universitas PGRI Yogyakarta dan semua pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, Juli 2019

Tim Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
EKSPONEN DAN BENTUK AKAR

A. Pendahuluan

Bilangan berpangkat sangatlah membantu kita dalam mempersingkat bilangan yang relatif besar atau kecil sekali. semisal 0,00000099 ditulis dalam bilangan berpangkat menjadi 9,9 x 10^{-7}. Adapun orang yang pertama kali menemukan bilangan berpangkat atau eksponen adalah John Napier (1550-1617). John Napier merupakan seorang bangsawan dari merchiston, skotlandia. Dia juga merupakan penemu bilangan logaritma, yang memang ada hubungannya dengan bilangan eksponen. Napier menyadari bahwa setiap bilangan bisa diubah dalam bentuk eksponen maupun logaritma, agar bilangan tersebut bisa dirubah dalam bentuk yang lebih sederhana.

Jika dilihat dari asal katanya eksponen berasal dari dua suku kata dari bahasa lain "*Expo*" dan "*Ponere*". *Expo* berarti berasal atau dari dan *ponere* tempat dia sendiri. Penggunaan kata eksponen dalam matematika modern tercatat pertama kali dalam buku "*Arithemetica Integra*" yang ditulis oleh seorang ahli matematika asal inggris bernama Michael Stifel. Namun demikian saat itu istilah eksponen hanya digunakan untuk bilangan dasar 2. Jadi istilah eksponen 3 berarti 2^3 yang bernilai 8. Ini jelas agak berbeda dengan konsep eksponen yang saat ini kita pakai.

Kemunculan awal eksponen memang belum jelas pastinya. Meskipun tidak 100% benar banyak yang menyebutkan sistem pangkat atau eksponen ini sudah ada sejak jaman Babilonia. Pada abad 23 sebelum masehi Masyarakat Babel di sekitar wilayah Mesopotamia telah mengenal pengkuadratan dalam sistem penanggalan mereka.

Konsep eksponen di zaman modern agak berbeda dari konsep Stifel atau dari masyarakat Babel. Eksponen sekarang digunakan untuk menentukan berapa kali bilangan tersebut dikalikan dengan ia sendiri. Dengan adanya eksponen anda tidak perlu lagi menuliskan 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3, anda cukup menulis 3^{10}.

B. Eksponen (Pangkat)

1. Pengertian

Eksponen adalah perkalian berulang. Banyaknya perkalian yang dilakukan ditulis di atas bilangan pokok dengan ukuran angka kecil. Misal, 4 x 4 x 4. Maka ditulis 4^3dengan 4 sebagai bilangan pokok, dan 3 sebagai bilangan pangkat (banyaknya perkalian).

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\textit{sebanyak n faktor}}$$

Bentuk umumnya adalah a^n, di mana a disebut bilangan pokok atau bilangan dasar, sedangkan n disebut pangkat atau eksponen.

2. Pangkat dan Sifat-Sifatnya

Pangkat dapat berupa bilangan nol, bilangan bulat (positif dan negatif), bilangan pecahan (rasional) dan bilangan irrasional.

a. Pangkat Bilangan Bulat Positif

Untuk $a, m, n \in$ bilangan bulat, $a \neq 0$, $b \neq 0$, berlaku sifat-sifat berikut:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a)}_{m \text{ factor}} \cdot \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a)}_{n \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } \ldots a)}_{(m+n) \text{ factor}}$$

$$= a^{m+n}$$

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n}.\, a^n}{a^n} = a^{m-n}.1 = a^{m-n}$$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Bukti:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m \text{ x } a^m \text{ x } a^m \text{ x } \ldots \text{ x } a^m)}_{n \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a \text{ x } a \text{ x} \ldots \text{x } a)}_{m \text{ factor}} \text{ x } \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x} \ldots \text{x } a)}_{m \text{ factor}} \text{ x } \ldots \text{ x } \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x} \ldots \text{x } a)}_{m \text{ factor}}}_{n \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a)}_{(m \text{ x } n) \text{ factor}}$$

$$= a^{m \cdot n}$$

4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Bukti:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \text{ x } b) \text{ x } (a \text{ x } b) \text{ x } \ldots \text{ x } (a \text{ x } b)}_{m \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{(a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a)}_{m \text{ factor}} \text{ x } \underbrace{(b \text{ x } b \text{ x } \ldots \text{ x } b)}_{m \text{ factor}}$$

$$= a^m \cdot b^m$$

5) $(a : b)^m = a^m : b^m$

Bukti

$$(a:b)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right) \times \ldots \times \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ factor}}$$

$$= \frac{a \text{ x } a \text{ x} \ldots \text{x } a}{b \text{ x } b \text{ x} \ldots \text{x } b}, \quad \frac{n \text{ faktor}}{n \text{ faktor}}$$

$$= a^m : b^m$$

b. Pangkat Bilangan Nol

Untuk a ∈ bilangan real, $a \neq 0$, berlaku sifat berikut:

$a^0 = 1$

Gunakan sifat-sifat bilangan pangkat bulat positif, untuk membuktikan alasan pendefinisian.

$a^0 \,.\, a^n = a^{0+n} = a^n$ bagilah kedua ruas dengan a^n sehingga diperoleh:

$$\frac{a^{0+n}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n}$$

$$a^0 . \frac{a^n}{a^n} = \frac{a^n}{a^n}$$

$$a^0\ (1) = 1$$

$$a^0 = 1$$

c. Pangkat Bilangan Bulat Negatif

Untuk a, m ∈ bilangan real, $a \neq 0$, berlaku sifat-sifat berikut:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Dari definisi di atas dapat kita tunjukkan, dengan menggunakan sifat bentuk pangkat bulat positif dan nol yaitu sebagai berikut:

$$a^m . a^{-m} = a^{m+(-m)}$$

$$a^m . a^{-m} = a^0$$

$$a^m . a^{-m} = 1$$

Bagilah kedua ruas dengan a^m, sehingga diperoleh:

$$\frac{a^m . a^{-m}}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Contoh:

1. Hasil dari $(2^3) \cdot (2^3)^{-5}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned}(2^3) \cdot (2^3)^{-5} &= 2^6 \cdot 2^{-15}\\ &= 2^{6+(-15)}\\ &= 2^{-9}\\ &= \frac{1}{2^9}\\ &= \frac{1}{512}\end{aligned}$$

2. Bentuk sederhana dari $(a^2 \cdot b)^3 \cdot (a^3 \cdot b^4)^{-1}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned}(a^2 \cdot b)^3 \cdot (a^3 \cdot b^4)^{-1} &= a^{2 \cdot 3} \cdot b^3 \cdot a^{3 \cdot (-1)} \cdot b^{4 \cdot (-1)}\\ &= a^6 \cdot b^3 \cdot a^{-3} \cdot b^{-4}\\ &= a^{6+(-3)} \cdot b^{3+(-4)}\\ &= a^3 \cdot b^{-1}\\ &= \frac{a^3}{b}\end{aligned}$$

3. Hasil dari $\dfrac{a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^6}{abc}$, untuk $a = 5$, $b = 2$, dan $c = 1$ adalah . ..

Penyelesaian:

$$\frac{a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^6}{abc} = \frac{5^3 \cdot 2^{-2} \cdot 1^6}{5 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5^2}{2 \cdot 2^2} = \frac{25}{8}$$

C. Bentuk Akar

Pada materi sebelumnya, kita telah mempelajari tentang bilangan berpangkat bulat beserta operasinya. Selanjutnya pengertian bilangan berpangkat diperluas sampai bilangan berpangkat rasional, yaitu bilangan berpangkat bulat berpangkat pecahan.

1. Bentuk Akar dan Pangkat Pecahan Beserta Sifat-sifatnya

Untuk $a, b, m, n \in$ bilangan real, $a, m, n \neq 0$, berlaku sifat-sifat berikut:

a. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$

c. $\sqrt[m]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}}$

Bukti:

$\sqrt[m]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{n \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}}$

d. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

Bukti:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

e. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Bukti:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$

2. Operasi Aljabar Pada Bentuk Akar Kuadrat

Dengan menggunakan sifat pada bilangan realdan sifat-sifat bentuk akar maka kita dapat melakukan operasi aljabar pada bentuk akar.Operasi aljabar yang dimaksud adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.Operasi aljabar pada bentuk akar digunakan untuk menyederhanakan bentuk akar.

Sifat-sifat yang dapat digunakan pada operasi aljabar adalah sebagai berikut:

a. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$

b. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$

c. $b\sqrt[n]{a} \cdot d\sqrt[n]{c} = bd\sqrt[n]{ac}$

d. $b\sqrt[n]{a} : d\sqrt[n]{c} = \frac{b}{d}\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$

e. $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt[n]{a}$ dan $\sqrt[n]{c}$ ada nilainya dan n bilangan bulat positif lebih dari satu atau sama dengan dua.

3. Merasionalkan Penyebut

Jika kita menemukan bentuk pecahan dengan penyebut bentuk akar, maka untuk menyederhanakan bentuk pecahan tersebut kita dapat menghilangkan bentukar penyebutnya. Proses menghilangkan bentuk akar pada penyebut dinamakan *merasionalkan penyebut.*

Untuk *a, b, c* ∈ bilangan real, *a, b* ≠ 0, *k* = konstanta, berlaku sifat-sifat berikut:

a) $a \cdot b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

c) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$

d) $\frac{k}{a+\sqrt{b}} = \frac{k}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{k(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

e) $\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{k(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

Contoh:

1. Nilai x yang memenuhi $5^{3x-2} = 25^{2x+1}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $5^{3x-2} = 25^{2x+1}$

   $5^{3x-2} = (5^2)^{2x+1}$

   $5^{3x-2} = 5^{4x+2}$

   Bilangan pokok tersebut sama, yaitu 5. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, samakan bilangan berpangkatnya.

   $3x - 2 \quad = 4x + 2$

   $3x - 4x \quad = 2 + 2$

   $-x \quad = 4$

   $x \quad = -4$

2. Nilai x dari $\sqrt{3^{x+3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $\sqrt{3^{x+3}} \quad = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}$

   $(3^{x+3})^{\frac{1}{2}} \quad = (3^{-1})^{6-x}$

   Selesaikan persamaan pengkatnya.

   $(x + 3)\ \frac{1}{2} \quad = -1\ (6 - x)$

   $\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \quad = -6 + x$

   $\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \quad = -\frac{12}{2} + \frac{2x}{2}$

   $\frac{x}{2} - \frac{2x}{2} \quad = -\frac{12}{2} - \frac{3}{2}$

   $-\frac{x}{2} \quad = -\frac{15}{2}$

   $-x \quad = -15$

   $x \quad = 15$

3. Bentuk sederhana dari $\frac{p^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{q^3}}{p \cdot q}$ adalah . . .

Penyelesaian:

$$\frac{p^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[5]{q^3}}{p\cdot q} = \frac{p^{\frac{3}{4}}\cdot q^{\frac{3}{5}}}{p\cdot q}$$

$$= p^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}}\cdot q^{\frac{3}{5}-\frac{5}{5}}$$

$$= p^{-\frac{1}{4}}\cdot q^{-\frac{2}{5}}$$

4. Bentuk sederhana dari $6\sqrt{5} + \sqrt{5} - 20\sqrt{5}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $6\sqrt{5} + \sqrt{5} - 20\sqrt{5} = (6 + 1 - 20)\sqrt{5}$

   $= -13\sqrt{5}$

5. Bentuk sederhana dari $4\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{27}$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $4\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{4\cdot 3} - \sqrt{9\cdot 3}$

   $= 4\sqrt{3} + 3\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

   $= (4 + 6 - 3)\sqrt{3}$

   $= 7\sqrt{3}$

6. Bentuk sederhana dari $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ adalah . . .

   Penyelesaian:

   $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}) - (2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3})$

   $= (9\cdot 2) - (4\cdot 3)$

   $= 18 - 12$

   $= 6$

7. Dengan merasionalkan bentuk akar, nilai dari $\frac{9}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ menjadi . . .

   Penyelesaian:

   $$\frac{9}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

   $$= \frac{9\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2}$$

   $$= \frac{9\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

   $$= 3(\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

   $$= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$$

D. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

1. Masalah yang Dihadapi Siswa Saat Belajar Eksponen dan Bentuk Akar
   a. Kesalahan konseptual, yang meliputi:
      1) Kesalahan dalam memahami sifat atau aturan bentuk akar dan pangkat.

2) Kesalahan dalam menyederhanakan bentuk akar dan pangkat yang berbeda variabelnya.
3) Kesalahan dalm menetapkan faktor pengali atau merasionalkan penyebut suatu pecahan bentuk akar.
4) Siswa tidak memberikan jawaban dalam bentuk paling sederhana

b. Kesalahan prosedural, yang meliputi:
1) Kesalahan dalam menentukan nilai dari suatu bilangan berakar atau berpangkat.
2) Kesalahan dalam mengubah suatu bilangan dalam bentuk pangkat.
3) Kesalahan dalam perhitungan yaitu operasi hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan bentuk akar maupun bentuk aljabar.
4) Kesalahan karena tidak mampu melanjutkan proses penyelesaian.
5) Ketidakmampuan menulis langkah – langkah untuk menjawab soal.
6) Kesalahan dalam memahami dan mencermati soal

2. Solusi Untuk Mengatasi Kesulitan Belajar Pada Siswa
a. Pastikan siswa memahami konsep matematika yang dipelajari.
b. Ajarkan siswa menulis angka-angka dengan teliti.
c. Menyampaikan konsep materi dengan bahasa yang mudah dimengerti oleh siswa
d. Guru bisa memberikan contoh konkret tentang eksponen sehingga pembelajaran bisa lebih bermakna. Misalnya: suatu bakteri membelah diri menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri dalam dua jam adalah 4500 dan tiga jam berikutnya menjadi 121500 bakteri. Dalam waktu tujuh jam, berapakah jumlah bakteri tersebut?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen. Alternative penyelesaiannya dengan memisalkan jumlah bakteri pada awalnya ($t = 0$) adalah x_0. Jumlah bakteri pada jam ke-1 adalah rx_0, pada jam ke-2 adalah r^2x_0 , pada jam ke-3 adalah r^3x_0. Pada jam ke-n adalah $r\left(r^{n-1}x_0\right) = r^n x_0$.

Maka diperoleh penyelesaian sebagai berikut:

$$\frac{x_5}{x_2} = \frac{121500}{4500} \Leftrightarrow \frac{r^5 x_0}{r^2 x_0} = 27$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3.$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa setiap 1 jam bakteri membelah menjadi 3 bakteri. Banyak bakteri pada awalnya adalah:

$$3^2 x_0 = 4500 \Leftrightarrow x_0 = 500.$$

Jumlah bakteri selama 7 jam adalah:

$$x_7 = r^7 x_0 = 3^7.(500) = 1093500$$

E. LATIHAN SOAL

Pilihlah jawaban yang paling benar!

1. Hasil dari $(2^2)^4 \cdot (2^3)^{-4}$ adalah . . .
2. Nilai x yang memenuhi $3^{2x+4} = 9^{3x-4}$ adalah . . .
3. Jika $a = 27$ dan $b = 9$, nilai $2(a^{\frac{1}{3}}) \cdot 5(b^{-\frac{1}{2}})$ adalah . . .
4. Bentuk sederhana dari $4\sqrt{2} + 5\sqrt{18} - \sqrt{50}$ adalah . . .
5. Bentuk sederhana dari $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ adalah . . .
6. Jika $x = 1$ dan $y = 4$, nilai $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{4}{3}}}{y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2}$ adalah . . .
7. Bentuk sederhana dari $(9p^2 \cdot q^{-3})^4 \cdot (27p^4 \cdot q^{-2})^{-3}$ adalah . . .
8. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{27(3^2)^3}}}{81}$ adalah . . .
9. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}}{\sqrt{108}}$ adalah . . .
10. Nilai x dari $\sqrt[4]{8^{x-5}} = 4^{4+2}$ adalah . . .

BAB II
LOGARITMA

A. Pendahuluan

Sebelum penemuan logaritma, orang telah lebih dulu menggunakangagasan yang mendasari penelitian ilmu logaritma yaitu *prosthaphaeresis,* perubahan proses pembagian dan perkalian kepada penambahan dan pengurangan. Orang pertama yang memulai gagasan ini adalah Ibnu Yunus As-Sadafi al-Misri (950-1009) yang sezaman dengan tokoh optik dan geometri, al-Haytsam atau al-Hazen (965-1039), karena penemuannya terhadap hukum yang kemudian dikenal sebagai “Hukum Ibnu Yunus”, yaitu 2.cos x. cos y =cos $(x + y)$ + cos $(x – y)$. Aturan serupa juga digunakan oleh Viéte, Werner, Pitiscus, dan Tycho Brahe. Lalu bagaimana Logaritma ditemukan ?

Logaritma ditemukan di awal tahun 1600 oleh John Napier (1550-1617) dan JoostBürgi (1552-1632), walaupun banyak yang mengatakan Napier adalah perintis yangsebenarnya. Napier sendiri menghabiskan waktu sekitar 20 tahun sebelum menemukan idelogaritma tersebut dengan menerbitkan karyanya, *Descriptio* (lengkapnya *MinificiLogarithmorum Canonis Descriptio*) tahun 1614.

Bürgi di lain pihak, mempublikasikan *Progress-Tabulen* (lengkapnya *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*) tahun 1620, walaupun penemuannya itu berasal dari tahun 1588. Hal ini diketahui melalui sebuah surat dari seorang astronom Reimanus Ursus Dithmarus yang menjelaskan tentang metode Bürgi dalam menyederhanakan perhitungan matematis lewat penggunaan cara yang kini disebut logaritma.

Walaupun demikian, pada prinsipnya kedua logaritma yang mereka temukan sama, yang berbeda hanya pendekatannya. Bila Napier lewat pendekatan aljabar, maka Bürgi menggunakan pendekatan geometris.Sementara ide pekerjaan Napier dapat dijelaskan secara sederhana. Untuk membuatsetiap suku pada deret geometri menjadi sangat dekat, kita tentunya memilih bilangan yang mendekati satu. Napier memilih bilangan $1 – 10^{–7}$ (atau 0,9999999), sehingga tiap suku adalah $(1 – 10^{–7})^{L}$. Kemudian untuk mendapatkan nilai desimal, setiap suku ia kalikan dengan 10^{7}.jika $N = 10^{7} (1 – 10^{–7})^{L}$ maka L disebutnya sebagai *logaritma* dari bilangan N.

Kata *logaritma* berasal dari kata *logos* (perbandingan) dan *arithmos* (bilangan).Sebelumnya, ia menyebutnya dengan “artifisial numbers” (bilangan buatan). Perhatikanbahwa logaritma Napier tidaklah sama dengan logaritma yang kita gunakan sekarang.Sebagai misal, bila logaritma modern menyatakan log ab = log a + log b atau $ab = 10^{\log a + \log b}$ maka Logaritma Napier menyatakan $N1.N2/10^{7} = 10^{7}. (1 – 10^{–7})^{L1 + L2}$. Jadi, logaritma dari Napier untuk penjumlahan tidak menyatakan N1.N2 melainkan $N1N2/10^{7}$. Logaritma Napier dapat kita dekati menjadi logaritma modern, bila bilangan logaritma dan bilangan N kita bagi dengan 10^{7}. Maka akan kita peroleh logaritma modern, tetapi dengan basis mendekati $1/e$. Sedikit berbeda dengan logaritma Napier, Logaritma Bürgi memiliki bentuk $N = 10^{8}(1 + 10^{– 4})^{L}$, dengan tabel dinyatakan dalam bentuk 10^{L}. Burgi menyebut bilangan L sebagai bilangan “merah” (“*red” numbers*) dan bilangan N sebagai bilangan “hitam” (“*black” numbers*).

Henry Briggs (1561-1631), seorang profesor geometri di Oxford, mendiskusikan masalahlogaritma bersama Napier dan menyarankan metodenya sendiri. Ia melihat, seharusnya log (1) = 0 dan log(10) = 1. Briggs lalu membuat tabel logaritma dengan menggunakan syarat yang ia buat tadi. Sehingga ia dapatkan log (101/2) = log (3,1622277) = 0,500000. Briggs lalu mempublikasitabel logaritma dari 1 hingga 1000 dalam *Logarithmorum chilias prima* (tahun 1617). Tahun 1624, ia mempublikasikan lagi tabel dengan bilangan hingga 100.000 dalam *Arithmetica logarithmica*. Keduanya hingga ketelitian 14 desimal, tetapi tabel pertama mengandung beberapa entri yang tidak tepat. Dari buku tabel kedua itulah, mulai digunakan istilah “mantissa” dan “characteristic”.

B. Logaritma

1. Pengertian Logaritma

   Logaritma merupakan invers (kebalikan) dari perpangkatan. Misalnya a adalah bilangan positif (a > 0) dan g adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 (g > 0, g ≠ 1) maka ${}^{g}\log a = x$ jika hanya jika $g^{x} = a$

   Atau bisa ditulis:

   a. Untuk ${}^{g}\log a = x \rightarrow g^{x} = a$

   b. Untuk $g^{x} = a \rightarrow x = {}^{g}\log a$

      Catatan:

      $a^0 = 1 \rightarrow {}^{a}\log 1 = 0$

      $a^1 = a \rightarrow {}^{a}\log a = 1$

      $a^n = a^n \rightarrow {}^{a}\log a^n = n$

2. Sifat-sifat Logaritma

   a. ${}^{p}\log x.y = {}^{p}\log x + {}^{p}\log y$

      Bukti:

      Misalkan ${}^{p}\log x = q$ dan ${}^{p}\log y = r$, maka

      x= p^q dan y = p^r

      x. y = p^q. p^r

      ${}^{p}\log x.y = q + r$

      ${}^{p}\log x.y = {}^{p}\log x + {}^{p}\log y$ (terbukti)

      Jadi, ${}^{p}\log x.y = {}^{p}\log x + {}^{p}\log y$.

      Catatan: jika bilangan pokok logaritma tidak ditulis, maka bilangan pokok logaritmanya adalah 10.

   b. ${}^{p}\log \frac{x}{y} = {}^{p}\log x - {}^{p}\log y$

      Bukti:

      Misalkan ${}^{p}\log x = q$ dan ${}^{p}\log y = r$, maka

      x = p^q dan y = p^r

      $\frac{x}{y} = \frac{p^q}{p^r}$

      $\frac{x}{y} = p^{q-r}$

      ${}^{p}\log \frac{x}{y} = {}^{p}\log x - {}^{p}\log y$ (terbukti)

      Jadi, ${}^{p}\log \frac{x}{y} = {}^{p}\log x - {}^{p}\log y$.

      Catatan: jika bilangan pokok logaritma tidak ditulis, maka bilangan pokok logaritmanya adalah 10.

c. ${}^{p}\log x^{n} = n\ {}^{p}\log x$

p dan x biangan real positif $p \neq 1$ dan n bilangan rasional.

Bukti:

Misalkan ${}^{p}\log x = q$, maka$x = p^{q}$

$x^{n} = (p^{q})^{n}$

$x^{n} = p^{n.q}$

${}^{p}\log x^{n} = {}^{p}\log p^{n.q}$

${}^{p}\log x^{n} = n\ .\ q$

${}^{p}\log x^{n} = n\ {}^{p}\log x$ (terbukti)

Jadi, ${}^{p}\log x^{n} = n\ {}^{p}\log x$.

d. ${}^{p}\log x = \frac{logx}{logp}$

$x; p$ Є Real positif dan$p \neq 1$

Bukti:

Misal ${}^{p}\log x = q$; maka$x = p^{q}$

$logx = logp^{q}$

$logx = qlogp$

$q = \frac{logx}{logp}$ (terbukti)

Jadi, ${}^{p}\log x = \frac{logx}{logp}$.

e. ${}^{p}logx \times {}^{x}logy = {}^{p}\log y$

Bukti:

${}^{p}logx \times {}^{x}logy = \frac{logx}{logp} \times \frac{logy}{logx} = \frac{logy}{logp} = {}^{p}\log y$ (terbukti)

Jadi, ${}^{p}logx \times {}^{x}logy = {}^{p}\log y$

f. ${}^{p}\log x = {}^{p}\log y \leftrightarrow x = y$

Bukti:

Misal ${}^{p}\log x = a \leftrightarrow x = p^{a}$. . . . . (i)

${}^{p}\log x = {}^{p}\log y = a$maka ${}^{p}\log y = a$

$y = p^{a}$. . . . . (ii)

Dari (i) dan (ii) didapat:

$x = p^{a} = y$

Jadi, $x = y$ (terbukti).

g. ${}^{p^{n}}\log x^{m} = {}^{p}\log x^{\frac{m}{n}}$

Bukti:

Misal ${}^{p^{n}}\log x^{m} = $ q, maka:

$(p^{n}) = x^{m}$

$\leftrightarrow p^{n.q} = x^{m}$

$\leftrightarrow p^q = x^{\frac{m}{n}}$

$\leftrightarrow {}^{p}\log p^q = {}^{p}\log x^{\frac{m}{n}} \leftrightarrow q = {}^{p}\log x^{\frac{m}{n}}$ (terbukti)

Jadi, ${}^{p^n}\log x^m = {}^{p}\log x^{\frac{m}{n}}$.

3. Fungsi logaritma

Fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponen. Hubungan invers antara fungsi logaritma dengan fungsi eksponen dapat dijelaskan sebagai berikut.

Tabel 8-1a

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y =$ f(x) = 2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Tabel 8-1a memperlihatkan hubungan antara nilai x dengan nilai $y = f(x) = 2^x$. Perhatikan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara anggota-anggota dalam himpunan {-3,-2,-1,0,1,2,3} dengan anggota-anggota dalam himpunan $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$, yaitu pemetaaan satu-satu dari x ke $y = f(x) = 2^x$ adalah fungsi bijektif. Oleh karena fungsi $f(x)$ bijektif, maka fungsi ini mempunyai fungsi invers $f^{-1}(x)$ dengan daerah asal $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$ dan wilayah hasil {-3,-2,-1,0,1,2,3} sebagaimana diperlihatkan pada tabel 8-1b. Fungsi $f^{-1}(x)$ dengan daerah asal dan wilayah hasil seperti itu adalah fungsi logaritma $f^{-1}(x) = {}^{2}\log x$.

Tabel 8-1b

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = f(x) = {}^{2}\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Definisi fungsi logaritma:

Fungsi logaritma dengan bilangan pokok a (a > 0 dan a $\neq$ 1) adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum $f^{-1}(x) = {}^{2}\log x$. Fungsi logaritma y = f (x) = ${}^{a}\log$ x merupakan fungsi invers dari fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan pada fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$:

a. $f(x) = {}^{a}\log x$ disebut rumus atau aturan bagi fungsi logaritma baku atau fungsi logaritma standar.
b. A adalah bilangan pokok atau basis bagi fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$, dengan ketentuan a > 0 dan a $\neq$ 1 (0 < a < 1 atau a > 1)
c. Daerah asal (domain) fungsi $f(x) = {}^{a}\log$ x dan $\boldsymbol{D_f} = \{ x \mid x > 0$ dan $x \in \mathbf{R}\}$.
d. Wilayah hasil (range) fungsi $f(x) = {}^{a}\log$ x adalah $\boldsymbol{W_f} = \{ y \mid y \in \mathbf{R}\}$.

4. Grafik fungsi logaritma s

Grafik fungsi logaritma $f : x \rightarrow {}^a\log x$ dapat dikelompokkan menjadi dua macam (ditentukan oleh nilai basis a), yaitu:

a. Grafik fungsi logaritma dengan basis a > 1

Sifat-sifat fungsi logaritma $f : x \rightarrow {}^a\log x$ dengan basis a > 1 dapat dipelajari melalui grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^a\log x$. Sebagai contoh kita akan melukiskan grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ ($x > 0$ dan $x \in \mathbf{R}$). Grafik fungsi logaritma tersebut dilukiskan dengan langkah-langkah sebagai berikut

Langkah 1

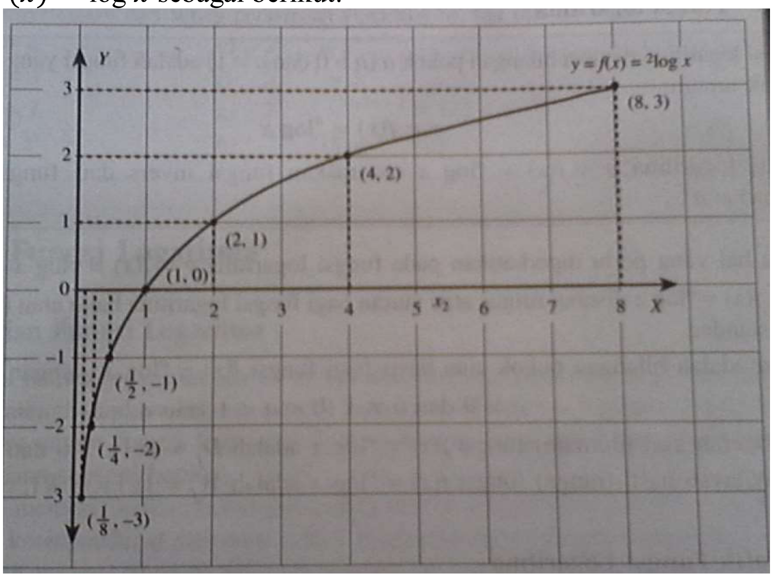
Buat tabel yang menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^2\log x$. Perhatikan tabel 8-2

Tabel 8-2

X	$\rightarrow 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\rightarrow \infty$
Y	$\rightarrow -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\rightarrow \infty$

Langkah 2

Setiap titik (x, y) yang iperoleh pada langkah 1 digambar dalam bidang cartesius. Selanjutnya setiap titik (x, y) tadi dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ sebagaimana pada gambar 1, kita dapat mempelajari sifat-sifat fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ sebagai berikut:



Gambar 1

1) Jika nilai x bertambah besar maka nilai $y = f(x) = {}^2\log x$ juga menjadi besar, tetapi pertambahan nilai y lebih lambat dibandingkan dengan pertambahan nilai x.
2) Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ adalah fungsi monoton naik, sebab grafik ini naik dari kiri bawah ke kanan atas. Dalam bahasa logika matematika ditulis $x_2 > x_1 \rightarrow {}^2\log x_2 > {}^2\log x_1$
3) Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ memotong sumbu X di titik (1,0).
4) Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ selalu berada disebelah kanan sumbu Y atau $x > 0$. Ini berarti grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$

tidak pernah memotong sumbu Y. Sumbu Y bertindak sebagai asimtot tegak bagi fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$.

5) Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ terdefinisi untuk $x > 0$ dan $x \in \mathbf{R}$, sehingga daerah asal (domain) fungsi f adalah $\boldsymbol{D_f} = \{ x \mid x > 0 \text{ dan } x \in \mathbf{R}\}$.
6) Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ dapat bernilai positif, nol, atau negatif, sehingga daerah hasil (range) fungsi f adalah $\boldsymbol{W_f} = \{ y \mid y \in \mathbf{R}\}$.
7) Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ merupakan fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu sebab $f(x_1) = f(x_2)$ atau ${}^2\log x_1 = {}^2\log x_2 \rightarrow x_1 = x_2$.

b. Grafik fungsi logaritma dengan basis 0 < a < 1.

Sifat-sifat fungsi logaritma f : $x \rightarrow {}^a\log x$ dengan basis $0 < a < 1$ dapat dipelajari melalui grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^a\log x$. sebagai contoh kita akan melukiskan grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{1/a}\log x$ ($x > 0$ dan $x \in \mathbf{R}$). Grafik fungsi logaritma tersebut dilukiskan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

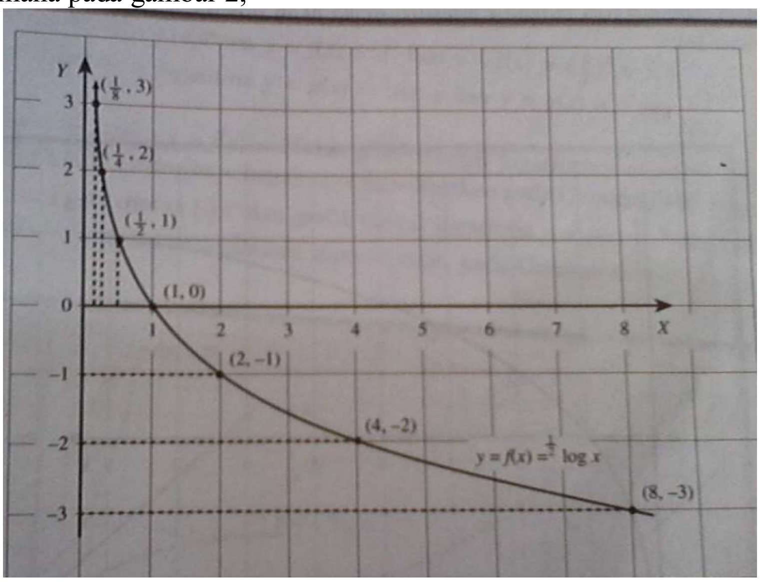
Langkah 1

Buat tabel yang menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^{½}\log x$. Perhatikan tabel 8-3

x	$\rightarrow 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\rightarrow \infty$
y	$\rightarrow \infty$	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...	$\rightarrow -\infty$

Langkah 2

Setiap titik (x, y) yang iperoleh pada langkah 1 digambar dalam bidang cartesius. Selanjutnya setiap titik (x, y) tadi dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{½}\log x$ sebagaimana pada gambar 2,



Gambar 2

Kita dapat mempelajari sifat-sifat fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{½}\log x$ sebagai berikut:

1) Jika nilai x bertambah besar, maka nilai $y = f(x) = {}^{½}\log x$ semakin mengecil dengan pengurangan yang semakin melambat .

2) Fungsi $y = f(x) = {}^{½}\log x$ adalah fungsi monoton turun, sebab grafik fungsi ini turun dari kiri atas ke kanan bawah dalam bahasa matematika ditulis $x_2 > x_1 \rightarrow {}^{½}\log x_2 > {}^{½}\log x_1$

c. Hubungan antara grafik fungsi $f : x \rightarrow {}^{a}\log x$ dengan $g : x \rightarrow {}^{½}\log x$

Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ dan grafik fungsi $y = g(x) = {}^{½}\log x$ simetri terhadap sumbu X, ini berarti grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ dapat diperoleh dari grafik fungsi logaritma $y = g(x) = {}^{½}\log x$ dengan cara mencerminkan terhadap sumbu X dan sebaliknya.

Contoh

1. Tentukan nilai logaritma berikut $2\ log\ 6 + 2\ log\ 18 - 2\ log\ 27$.

   Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\log 6 + {}^{2}\log 18 - {}^{2}\log 27 &= {}^{2}\log \frac{6.18}{27} \\
&= {}^{2}\log 4 \\
&= {}^{2}\log 2^{2} \\
&= 2.\ {}^{2}\log 2 \\
&= 2 \text{ x } 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

2. Jika ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, nyatakan ${}^{12}\log 30$ dalam a dan b.

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\log 30 &= \frac{{}^{3}\log 30}{{}^{3}\log 12} \\
&= \frac{{}^{3}\log(5.6)}{{}^{3}\log(4.3)} \\
&= \frac{{}^{3}\log 5 + {}^{3}\log 6}{{}^{3}\log 4 + {}^{3}\log 3} \\
&= \frac{{}^{3}\log 5 + {}^{3}\log 2 + {}^{3}\log 3}{2\,{}^{3}\log 2 + 1} \\
&= \frac{b + \frac{1}{a} + 1}{2\left(\frac{1}{a}\right) + 1} \\
&= \frac{\frac{ab + 1 + a}{a}}{\frac{2 + a}{a}} \\
&= \frac{ab + 1 + a}{2 + a}
\end{aligned}
$$

3. Jika diketahui $^2\log\sqrt{16x+4} = 5$.
   Penyelesaian:
   $^2\log\sqrt{16x+4} = 5$
   $^2\log\sqrt{16x+4} = {}^2\log 2^5$
   $\sqrt{16x+4} = 32$ (dikuadratkan)
   $16x + 4 = 1024$
   $16x = 1024 - 4$
   $16x = 1020$
   $x = 64$

4. Tentukan nilai dari $^5log\ ^4log\ 1024$.
   Penyelesaian:
   $^5log\ ^4log\ 1024 = {}^5log\ \ ^4log\ 4^5$
   $= {}^5log\ (5\ ^4log\ 4)$
   $= {}^5log\ (5 \times 1)$
   $= {}^5log\ 5$
   $= 1$

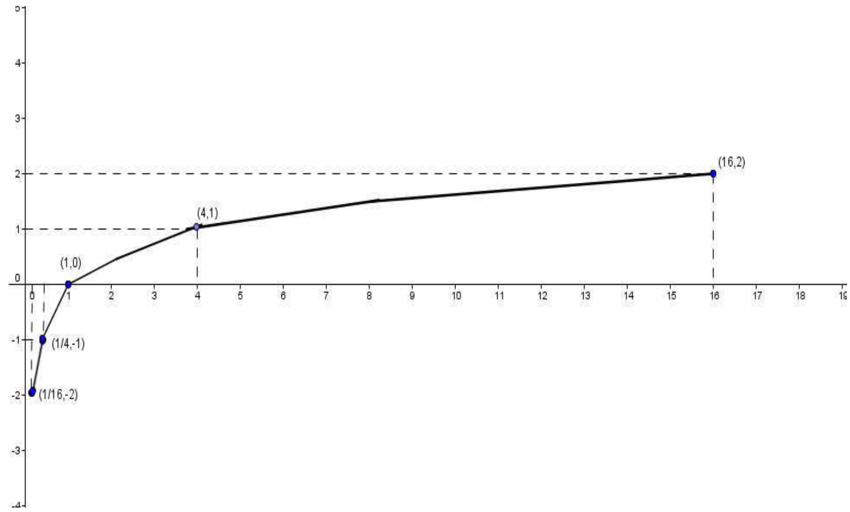
5. Nilai x yang memenuhi persamaan $^2log\ ^2log(2^{x+2} + 21) = 1 + {}^2\ log\ x$.
   Penyelesaian:
   $^2log\ ^2log(2^{x+2} + 21) = 1 + {}^2\log x$
   $^2log\ ^2log(2^{x+2} + 21) = {}^2log2\ x$
   $^2log(2^{x+2} + 21) = 2\ x$
   $^2log(2^{x+2} + 21) = {}^2log2^{2x}$
   $(2^{x+2} + 21) = 2^{2x}$
   $2^x.2^2 - 2^{2x} + 21 = 0$
   $-\ 2^{2x} + 2^x.2^2 + 21 = 0$
   $(2^x)^2 - (2^x.2^2) - 21 = 0$
   Misal: $2^x = a$
   Maka: $(2^x)^2 - (2^x.2^2) - 21 = 0$
   $a^2 - a\,.\,2^2 - 21 = 0$
   $a^2 - 4\,a - 21 = 0$
   $(a-7)(a+3) = 0$
   $a = 7\ atau\ a = -3$
   Jadi, $2^x = 7 = {}^2log7 = x$

6. Gambarlah grafik logaritma berikut ini dalam daerah asal (domain) yang telah ditetapkan. Gunakanlah kertas berpetak, tetapkan skala 1 cm untuk 1 satuan pada sumbu X dan 1 cm untuk 1 satuan pada sumbu Y.
   $Y = f(x) = {}^4log\ x$ dalam daerah asal $\boldsymbol{D_f} = \{\ x \mid 0 < x \leq 16,\ x \in \boldsymbol{R}\}$
   Penyelesaian:

   $y = f(x) = 4log\ x$

X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
Y	-2	-1	0	1	2

Grafik fungsi:



C. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

1. Kesulitan yang dialami siswa:
   a) Siswa kurang memahami sifat logaritma sehingga tidak bisa menerapkan sifat logaritma pada soal.
   b) Siswa kurang teliti dalam melakukan perhitungan bilangan real.
   c) Siswa kurang memahami maksud soal serta menggunakan informasi yang tertera pada soal yang dapat digunakan sebagai alat dalam mengerjakan soal.
   d) Kesalahan dalam menentukan invers atau fungsi logaritma.

2. Solusi yang dapat mengurangi kesulitan yang dialami oleh siswa:
   a) Memahami konsep dasar dari logaritma, hal ini kaitannya dengan merubah bentuk logaritma menjadi bentuk perpangkatan dan sebaliknya.
   b) Guru harus meningkatkan pemahaman konsep tentang sifat-sifat dan aturan logaritma pada siswa sehingga siswa tidak hanya menghafalkannya saja.
   c) Menyampaikan konsep materi fungsi logaritma dengan jelas dan mudah dipahami oleh siswa.

D. LATIHAN SOAL

1. Tentukanlahnilai logaritma berikut ${}^{8}log\ 32 + {}^{8}log\ 16 - {}^{8}log\ 128$.
2. Diketahui ${}^{2}log\ 3 = x$ dan ${}^{2}log\ 10 = y$. Nilai dari ${}^{6}log\ 120$ adalah
3. Nilai x yang memenuhi persamaan ${}^{2}log\ {}^{2}log(2^{x+1} + 3) = 1 + {}^{2}\ log\ x$.
4. Jika diketahui ${}^{2}log\ \sqrt{(12\ x + 4)} = 3$. Nilai x yang memenuhi adalah
5. Tentukan nilai dari ${}^{3}log\ {}^{5}log\ 125$.
6. Gambarlah grafik logaritma berikut ini dalam daerah asal (domain) yang telah ditetapkan. Gunakanlah kertas berpetak, tetapkan skala 1 cm untuk 3 satuan pada sumbu X dan 1 cm untuk 1 satuan pada sumbu Y.
   Y = f(x) = ^{3}log x dalam daerah asal $\boldsymbol{D_f} = \{x \mid 0 < x \leq 27, x \in \boldsymbol{R}\}$

BAB III
PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

A. Pendahuluan

Persamaan kuadrat merupakan cabang dari ilmu matematika yang dikenal sejak 2000 tahun lalu. Pada abad ke-4 sebelum masehi, para ilmuwan melakukan pendekatan coba-coba untuk mengetahui bagaimana menghitung panjang sisi dari suatu bidang. Para ilmuwan di Babilonia berhasil mengembangkan metode baru dengan menggunakan luas persegi. Metode serupa kemudian dikembangkan di Cina dengan menggunakan metode abacus.

Memasuki abad ke-3 sebelum masehi, ahli matematika legendaris dari Yunani kuno bernama Euclid mengembangkan beberapa pendekatan teoritis untuk menghitung akar dari suatu angka secara satu per satu. Sekitar abad ke-6 sebelum masehi, matematika berkembang pesat di India. Ilmuwan India memperkenalkan angka nol yang berperan penting terhadap perkembangan matematika.

Pada abad ke-7 sebelum masehi, Brahmagupta mengungkap metode untuk memperoleh dua akar dari suatu persamaan. Metode ini kemudian disempurnakan oleh ahli matematika Hindu bernama Baskhara pada tahun 1100-an. Ia mengungkap bahwa setiap bilangan positif memiliki dua akar kuadrat yaitu positif dan negatif.

Dalam abad ke-9 ahli matematikawan Arab bernama Muhammad ibn Musa al- Khwarismi yang dikenal sebagai penemu aljabar, ia juga mengungkap bentuk persamaan kuadrat. Keduanya ditulis dalam bukunya berjudul "Kitab al-jabr we al- muqabalah". Oleh Abraham bar Hiyya Ha-nasi di abad ke-12, persamaan kuadrat berhasil mencapai solusi general. Tahun 1545, Girolamo Cardano menyusun karya tentang persamaan kuadrat dengan mengkombinasi solusi Al-Khwarismi dengan geometri Euclid dan melibatkan bilangan kompleks dan bilangan imajiner. Persamaan kuadrat berhasil disempurnakan oleh Rene Descartes seorang ilmu matematika Prancis. Pada bukunya "La Geometrie", ia memperkenalkan bentuk persamaan kuadrat seperti yang kita terapkan saat ini.

B. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Definisi:

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan *a, b,* dan *c* bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan

Bentuk lain dari persamaan kuadrat

- ✓ Jika $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ disebut persamaan kuadrat bentuk yang tidak lengkap.

- ✓ Jika $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$ disebut persamaan kuadrat bentuk yang asli.

C. Menentukan akar-akar persamaan kuadrat

Secara umum ada 3 cara yang digunakan dalam menentukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu : 1) Memfaktorkan, 2) Melengkapkan bentuk kuadrat sempurna, 3) Menggunakan Rumus

1. *Memfaktorkan*

Faktor dari $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a = 1$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$(x + p)(x + q) = 0$

Nilai p dan q diperoleh dengan ketentuan :

- $p + q = b$
- $p \times q = c$

Setelah difaktorkan, langkah selanjutnya adalah menyatakan faktor tersebut menjadi sama dengan nol

$$x + p = 0 \text{ atau } x + q = 0$$

Nilai-nilai yang diperoleh dari persamaan diatas inilah yang kita sebut dengan akar-akar persamaan kuadrat.

Contoh **:**

Apabila salah satu akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x + c = 0$ yaitu 3, maka akar lainnya adalah.....

Penyelesaian **:**

Langkah pertama adalah mensubstitusikan nilai $x = 3$ untuk mengetahui nilai c.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + c &= 0 \\ 3^2 + 2(3) + c &= 0 \\ 9 + 6 + c &= 0 \\ 15 + c &= 0 \\ c &= -15 \end{aligned}$$

Langkah kedua adalah mensubstitusikan nilai c sehingga persamaannya menjadi :

$x^2 + 2x + c = 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

Kemudian menentukan nilai akarnya dengan pemfaktoran :

$(x + 5)(x - 3) = 0$

$x = -5$ atau $x = 3$

2. *Melengkapkan bentuk kuadrat sempurna*

Menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat merupakan salah satu alternatif jika akar-akar persamaan kuadrat memuat bentuk akar (irasional) sehingga sulit untuk difaktorkan.

Melengkapkan kuadrat dilakukan dengan cara mengubah salah satu ruas menjadi bentuk kuadrat sempurna $(x + y)^2$. Secara umum, bentuk $(x + y)^2$ dan $(x - y)^2$ disebut kuadrat sempurna.

Ingat : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ dan $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Berarti, $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$ termasuk bentuk kuadrat sempurna.

Langkah-langkah penyelesaian persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna ialah sebagai berikut :

a. Tempatkan suku- suku yang mengandung peubah (variabel) di ruaskiri dan konstanta di ruas kanan.
b. Koefisien x^2 harus satu
c. Tambahkan kedua ruas dengan kuadrat dari setengah koefisien x, sehingga ruas kiri menjadi kuadrat sempurna.

Secara umum melengkapkan kuadrat sempurna adalah membentuk persamaan menjadi $(x + p)^2 = q^2$

$\Rightarrow x + p = \pm q$

Sehingga diperoleh $x_1 = q - p$ dan $x_2 = -q - p$

Contoh **:**

Tentukan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 6x - 16 = 0$

Penyelesaian **:**

$\Rightarrow x^2 + 6x = 16$

$\Rightarrow x^2 + 6x + \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = 16 + \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 16 + 3^2$

$\Rightarrow (x + 3)^2 = 25$

$\Rightarrow (x + 3) = \pm\sqrt{25}$

$\Rightarrow (x + 3) = \pm 5$

$\Rightarrow x + 3 = 5 \; atau \; x + 3 = -5$

$\Rightarrow x = 2 \; atau \; x = -8$

3. *Menggunakan Rumus ABC*

Sama halnya dengan melengkapkan kuadrat, rumus kuadrat atau sering disebut rumus abc ini juga dapat menjadi alternatif dalam menentukan akar-akar persamaan kuadrat dimana akar-akarnya memuat bentk akar (irasonal). Atau untuk persamaan kuadrat yang sebenarnya bisa difaktorkan, tetapi sulit untuk difaktorkan karena memuat nilai-nilai a, b, c yang cukup besar.

Dengan mengubah bentuk persamaan umum $ax^2 + bx + c = 0$ ke dalam bentuk kuadrat sempurna akan diperoleh rumus kuadrat sebagai berikut :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- $ax^2 + bx = -c$ $\quad (langkah 1)$
- $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ $\quad (langkah 2)$
- $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2$ $\quad (langkah 3)$
- $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
- $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
- $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $x = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Jadi, akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari menggunakan rumus ABC, yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh **:**

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x^2 + 9x - 5 = 0$

Penyelesaian:

Dari $2x^2 + 9x - 5$=0, diketahui $a = 2, b = 9, dan\ c = -5\ maka$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 2 \times -5}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$= \frac{-9 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{-9+11}{4} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-9-11}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = -5$$

Jadi himpunan penyelesaianya adalah $\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$

D. Jumlah Dan Hasil Kali Persamaan Kuadrat

Berdasarkan rumus ABC, akar – akar persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \, dan \, x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dari akar – akar persamaan kuadrat di atas maka kita dapatkan rumus penjumlah dan perkalian persamaan kuadrat adalah :

1. ***Jumlah akar-akar persamaan kuadrat***

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Jadi, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

2. ***Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat***

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{2a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 + b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Jadi, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Berdasarkan rumus di atas dapat di simpulkan Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan akar – akar $x_1\ dan\ x_2$, maka di peroleh:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

E. Persamaan kuadrat dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan *a, b, c* adalah bilangan real $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

$$» \ x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$» \ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0$$

$$» \ (x - x_1)\, x - x_2 (x - x_1) = 0$$

$$» \ (x - x_1)\ (x - x_2) = 0$$

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Contoh :

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui sebagai berikut!

1. $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$
2. $x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$

Penyelesaian :

1. Diketahui $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$

   Maka $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

   $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

   Jadi persamaan kuadratnya adalah $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. Diketahui $x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$

   maka $\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

   $\Rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 5x - 6 = 0$

Jadi persamaan kuadratnya adalah $6x^2 - 5x - 6 = 0$

F. Grafik Fungsi Kuadrat

Ciri-ciri grafik fungsi kuadrat :

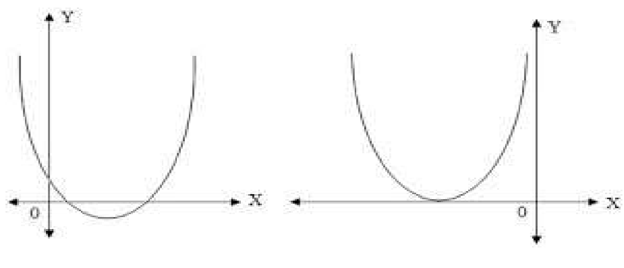
1. Setiap anggota daerah asal $x$memiliki tepat satu pasangan anggota daerah hasil$y$.
2. Memiliki sumbu simetri.
3. Memiliki titik balik (puncak).

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c adalah bilangan real dan a ≠ 0, memiliki:

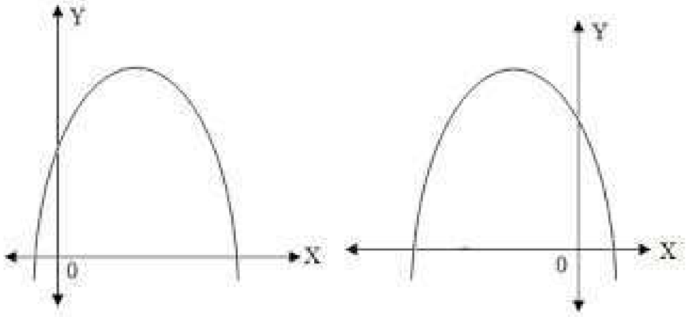
1. Persamaan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan
2. Titik puncak $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$.

Grafik fungsi kuadrat berupa parabola dengan posisi parabola ditentukan oleh nilai a. Dari fungsi kuadrat $f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right)$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan a $\neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat , yaitu:

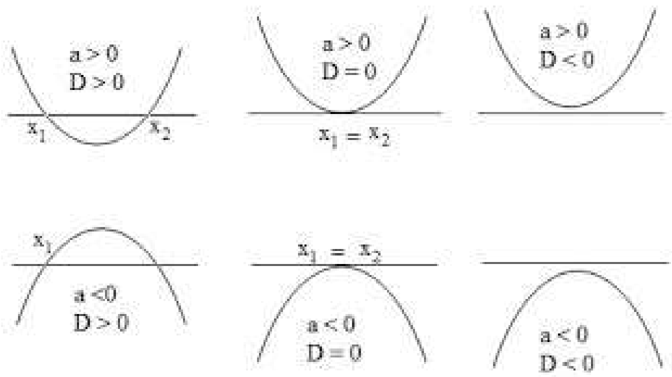
1. Jika a > 0, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real a ≠ 0 terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.



2. Jika a < 0, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real a ≠ 0 terbuka ke bawah dan memiliki titik balik maksimum $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$.



3. Grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real dan a $\neq$ 0. Misal $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)
   a. Jika D $>$ 0 maka grafik $y = f(x)$ memotong Sumbu-x pada dua titik berbeda
   b. Jika D = 0 maka grafik $y = f(x)$ menyinggung Sumbu-x pada satu titik
   c. Jika D $<$ 0 maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong Sumbu-x



G. Langkah- langkah membuat sketsa grafik fungsi kuadrat

Grafik fungsi kuadrat jika di gambarkan pada bidang koordinat maka grafik fungsi kuadrat akan berbentuk sebuah parabola dengan karakteristik tergantung darai koefisien –koefisien fungsi kuadrat tersebut.

Berikut karakteristik yang perlu di perhatikan dalam mensketsa grafik fungsi kuadrat

1. $a > 0$: parabola terbuka ke atas
2. $a < 0$: parabola terbuka ke bawah
3. D > 0 : memotong sumbu x di dua titik
4. D = 0 : menyinggung sumbu x
5. D < 0: tidak memotong sumbu x

Dari karakteristik di atas dapat di peroleh sketsa grafik fungsi kuadrat. Berikut langkah – langkah dalam membuat sketsa grafik fungsi kuadrat.

1. Menentukan titik otong sumbu x, di peroleh jika y =0
2. Menentukan titik potong dengan sumbu y, di peroleh $x = 0$
3. Menentukkan persamaan sumbu simetri $x = -\dfrac{b}{2a}$

Persamaan sumbu simetri adalah garis yang membagi parabola menjadi 2 bagian yang simetri.

1. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{-D}{4a}$

   Niai ekstrim disebut juga nilai maksimum atau minimum fungsi.

2. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

H. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

Kesulitan-kesulitan yang dihadapi siswa dalam memahami konsep Persamaan dan Fungsi Kuadrat antara lain:

1. Kesulitan belajar fungsi kuadrat, yang ditunjukan dengan hasil pekerjaan siswa dalam menjawab soal kuis, tugas atau ulangan.
2. Kesulitan belajar fakta yang meliputi angka/lambing bilangan, notasi diskriminan, notasi fungsi kuadrat dan kurva parabola.
3. Kesulitan belajar konsep seperti menyatakan bentuk aljabar ke bentuk baku fungsi kuadrat, membedakan fungsi kuadrat dengan persamaan kuadrat dan menentukan koefisien dan konstanta.

Solusi Pembelajaran yang dapat dilakukan

1. Guru banyak memberikan tugas-tugas mandiri menegenai materi fungsi kuadrat dan menyuruh siswa untuk mengerjakan dengan teliti dan sungguh-sungguh. Disini siswa dibuat aktif dengan pelatihan-pelatihan yang cukup dikerjakan di kelas dan pelatihan di rumah. Setiap pekerjaan di kelas hendaknya untuk segera dikumpul, karena mengurangi kegiatan mencontek bagi siswa jika pelatihan ini diselesaikan di rumah.
2. Untuk membelajarkan konsep guru dapat melakukan pembalajaran menggunakan bentuk-bentuk konkrit kemudian yang abstrak, karena siswa akan lebih cepat mengerti.

Latihan Soal

Selesaikanlah soal di bawah ini dengan benar!

1. Akar – akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah $p\ dan\ q.$ Jika $p^2 - 2pq + q^2 = 8a$, maka nilai a adalah …
2. Diketahui persamaan kuadrat $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$. Nilai a yang menyebabkan persamaan tersebut mempunyai akar – akar kembar adalah......
3. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar – akar persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 5 = 0$, hitunglah nilai dari $x_1^2 + x_2^2$!
4. Koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 2kx + k + 5\ adalah\ (m, m)$. Tentukanlah nilai $k + m$!
5. Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + 6x + a$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah ...

6. Jika x = 2p – 4q dan y = -p + 2q, maka nilai $\frac{2^x - 3xy + y^2}{x^2 - y^2}$ adalah …
7. Dua akuarium A dan B diisi air sehingga volumenya sama, yaitu 64.000 cm^3. Anto memiliki 30 kelereng kecil dan 20 kelereng besar yang akan dimasukkan ke dalam akuarium tersebut. Ke dalam akuarium A dimasukkan 7 kelereng kecil dan 7 kelereng besar sehingga volume akuarium yang terisi menjadi $64.821\frac{1}{3}$ cm^3, sedangkan ke dalam akuarium B dimasukkan 21 kelereng kecil dan 7 kelereng besar sehingga volume akuarium yang terisi menjadi 64.880 cm^3. Volume seluruh kelereng Anto yang tidak dimasukkan ke akuarium adalah … cm^3.
8. Suatu peluru ditembakkan ke atas. Tinggi peluru pada saat t detik dirumuskan oleh $h(t) = 40t - 5t^2$ (dalam satuan meter). Tinggi maksimum yang dapat ditempuh oleh peluru tersebut adalah …
9. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya (1 - $\sqrt{3}$) dan (1 + $\sqrt{3}$) adalah …
10. Jika terdapat grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah …

BAB IV
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita dihadapakan pada suatu masalah perhitungan yang melibatkan beberapa variabel. Penyelesaian masalah perhitungan menggunakan system persamaan linear, sebenarnya bukan sesuatu yang baru. Sistem persamaan linear bahkan sudah digunakan sejak 4000 tahun yang lalu (sekitar tahun 2000SM) pada masa Babylonian (Babel). Meskipun babel sudah menggunakan sistem persamaan linear dalam kehidupan sehari-hari, namun istilah " Sistem Persamaan Linear *(Linear Equation)"* sendiri baru muncul sekitar abad ke-17 oleh seorang matematikawan Perancis Bernama Rene Decartes. Rene Descartes dilahirkan pada tahun 1596, tanggal 31 maret disebuah desa di Prancis. Rene Decartes menemukan istilah untuk "Sistem Persamaan Linear *(Linear Equation)"* ketika dia belajar di Belanda.

Mulai dari awal tahun 2000 SM, banel mampu memecahkan sistem persamaan dalam bentuk:

$$x + y = p$$
$$xy = q$$

Jika kita menyelesaikan persamaan kedua untuk y (yang menghasilkan $y = \frac{q}{x}$)., pengganti nilai ini $\frac{q}{x}$ untuk y dalam persamaan pertama $\left(x + \frac{q}{x} = p\right)$, lalu dikalikan dengan x sehingga didapatkan persamaan:

$$x^2 + q = px$$

B. Sistem Persamaan Dua Variabel

Telah dibahas di SMP bahwa sistem persamaan linear dua variabel (peubah) terdiri atas dua persamaan linear yang masing-masing bervariabel dua. Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel disingkat dengan SPLDV. SPLDV dalam variabel x dan y dapat ditulis sebagai

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases} \quad atau \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Dengan a, b, c, p, q dan r atau a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 dan c_2 merupakan bilangan-bilangan real. Untuk selanjutnya kita gunakan bentuk umum SPLDV yang kedua.

Jika $c_1 = c_2 = 0$ maka SPLDV itu dikatakan ***homogen,*** sedangkan jika $c_1 \neq 0$ atau $c_2 \neq 0$ maka SPLDV itu dikatakan ***tak homogen.***

Contoh SPLDV homogen:

1. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$

Contoh SPLDV tak homogen:

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

Penyelesaian atau himpunan penyelesaian suatu SPLDV dengan dua peubah dapat ditentukan dengan beberapa cara, diantaranya adalah dengan menggunakan:

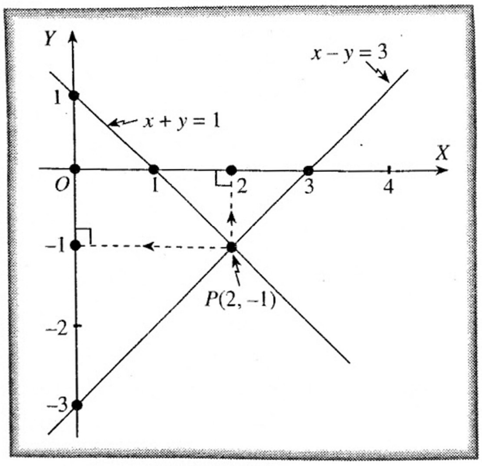
1. Metode Grafik

Untuk memahami cara menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode grafik, simaklah SPLDV berikut.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Kita ingat bahwa grafik persamaan linear berbentuk garis lurus. Grafik persamaan x + y = 1 dan x – y = 3 masing-masing merupakan garis lurus seperti diperlihatkan pada Gambar 3.2 disamping.

Dari gambar 3.2 tampak bahwa kedua garis itu berpotongan di titik P. Dari titik P dibuat garis tegak lurus sumbu X sehingga memotongnya di x = 2 dan dari titik P yang sama dibuat garis tegak lurus sumbu Y sehingga memotongnya di y = -1. Jadi, koordinat titik P adalah (2, -1). Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari SPLDV tersebut adalah (2, -1).



Langkah 1

Gambarkan grafik dari masing-masing persamaan pada sebuah bidang Cartesius.

Langkah 2

a. Jika kedua garis berpotongan pada satu titik, maka himpunan penyelesaiannya tepat memiliki satu anggota.
b. Jika kedua garis sejajar, maka himpunan penyelesaiannya tidak memiliki anggota. Dikatakan himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong, ditulis Ø.
c. Jika kedua garis itu berimpit, maka himpunan penyelesaiannya memiliki anggota yang tak hingga banyaknya.

Contoh :

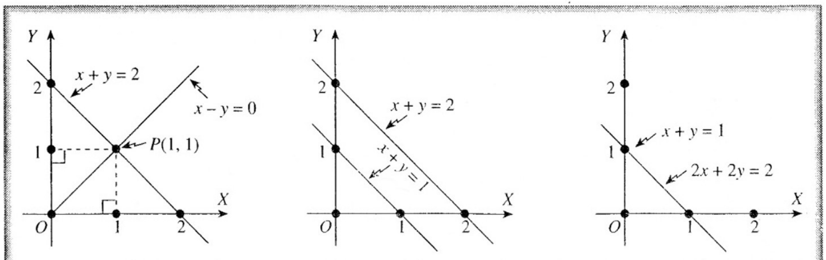
Carilah himpunan penyelesaian dari tiap SPLDV berikut ini dengan menggunakan metode Grafik.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

Penyelesaian:



(a) $x + y = 2$ dan $x - y = 0$ (b) $x + y = 1$ dan $x + y = 2$ (c) $x + y = 1$ dan $2x + 2y = 2$

2. Metode Substitusi

Penyelesaian SPLDV dengan metode substitusi dapat ditentukan dengan memakai langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Pilihlah salah satu persamaan (jika ada pilih yang sederhana), kemudian nyatakan sebagai fungsi y atau y sebagai fungsi x.

Langkah 2

Substitusikan x atau y pada langkah 1 ke persamaan yang lain.

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

SPLDV tersebut dapat diselesaikan dengan metode substitusi (mengganti atau menyulih) melalui langkah-langkah sebagai berikut. Dari persamaan $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ disubstitusikan (digantikan) ke persamaan $3x + 2y = 8$, diperoleh:

$3x + 2(2 - x) = 8$
$\Leftrightarrow 3x + 4 - 2x = 8$
$\Leftrightarrow x + 4 = 8$
$\Leftrightarrow x = 4$

nilai $x = 4$ disubstitusikan ke persamaan $y = 2 - x$, diperoleh:

$y = 2 - 4$
$\Leftrightarrow y = -2$

Jadi, himpunan penyelesaian SPLDV tersebut adalah (4, -2).

3. Metode Eliminasi

Untuk memahami cara penyelesaian SPLDV dengan menggunakan metode eliminasi (penghapusan atau pelenyapan), perhatikan kembali SPLDV berikut:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

Nilai x dicari dengan mengeliminasi peubah y:

$$\begin{array}{l|l|l} x+y \quad = 2 & x2 & 2x+2y=4 \\ 3x+2y=8 & x1 & \underline{3x+2y=8 \qquad -} \\ & & -x \quad = -4 \\ & \Leftrightarrow & \quad x = 4 \end{array}$$

Nilai y dicari dengan mengeliminasi peubah x :

$$\begin{array}{l|l|l} x+y=2 & x3 & 3x+3y=6 \\ 3x+2y=8 & x1 & \underline{3x+2y=8 \qquad -} \\ & & \quad y = -2 \end{array}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah (4, -2). Hasil ini sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode substitusi.

Berdasarkan pembahasan di atas, penyelesaian SPLDV dua peubah dengan metode eliminasi dapat ditentukan dengan cara nilai x dicari dengan mengeliminasi peubah y sedangkan nilai y dicari dengan mengeliminasi peubah x.

C. Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel (SPLTV)

Sistem persamaan linear dengan tiga variabel terdiri atas tiga persamaan linear yang masing-masing memuat tiga variabel. Sistem persamaan Linear Tiga Variabel dalam buku ini disingkat dengan SPLTV. Dengan demikian, SPLTV dalam variabel x, y, dan z dapat ditulis sebagai:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \\ ix+jy+kz=l \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Dengan a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k dan l atau a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, $c_2 d_2$, a_3, b_3, c_3 dan d_3 merupakan bilangan-bilangan real. Untuk selanjutnya kita gunakan bentuk umum sistem persamaan linear yang kedua.

Jika nilai x = x_0, y = y_0, dan z = z_0, ditulis dengan pasangan terurut (x_0, y_0, z_0), memenuhi SPLTV di atas, maka haruslah berlaku hubungan:

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0=d_1 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0=d_2 \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0=d_3 \end{cases}$$

Dalam hal demikian, (x_0, y_0, z_0) disebut penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dan himpunan penyelesaiannya ditulis sebagai (x_0, y_0, z_0).

Seperti halnya dalam SPLDV, penyelesaian atau himpunan penyelesaian SPLTV dapat ditentukan dengan beberapa cara:

1. Metode Substitusi

Langkah-langkah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode **Substitusi** sebagai berikut:

Langkah 1:

Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z, atau y sebagai fungsi x dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.

Langkah 2:

Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat SPLDV.

Langkah 3:

Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah 2.

Contoh:
Perhatikan SPLTV berikut ini:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

SPLTV di atas dapat diselesaikan dengan metode substitusi melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Dari persamaan $x - y + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x + y$. Substitusi $z = 6 - x + y$ ke persamaan $x + 2y - z = - 3$ dan $2x + y + z = 6$, diperoleh:
$x + 2y - (6 - x + y)n = -3$
$2x + y = 3$ .... (1)

$2x + y + (6 - x + y)n = -3$
$x + 2y = 3$ .... (2)

Persamaan (1) dan (2) membentuk SPLDV

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Dari persamaan $x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$. Substitusikan $x = -2y$ ke persamaan $2x + y = 3$, diperoleh :

$2(-2y) + y = 3$
$\Leftrightarrow -3y = 3$
$\Leftrightarrow y = -1$

Substitusikan $y = -1$ ke persamaan $x = -2y$, diperoleh:

$$x = -2\,(-1) = 2$$

Nilai $x = 2$ dan $y = -1$ disubstitusikan ke persamaan $z = 6 - x + y$, diperoleh:

$$z = 6 - (2) + (-1) = 3$$

jadi, himpunan penyelesaian SPLTV itu adalah $\{(2, -1, 3)\}$

2. Metode Eliminasi

Langkah-langkah penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode **eliminasi** sebagai berikut:

Langkah 1.
Eliminasi salah satu peubah x atau y atau z sehingga diperoleh SPLDV.

Langkah 2:
Selesaikan SPLDV yang didapat pada langkah satu.

Langkah 3:
Substitusikan nilai-nilai peubah yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai peubah yang lainnya.

Contoh:
Persamaan PLSTV berikut ini:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = -3 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

SPLTV akan diselesaikan dengan metode eliminasi:

Mengeliminasi peubah z:

Dari persamaan 1 dan 2

$$\begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ \underline{x + 2y - 6z = -3 \quad +} \\ \quad 2x + y = 3 \end{array} \qquad \text{...... (4)}$$

Dari persamaan ke 2 dan 3:

$$\begin{array}{l} x + 2y - 6z = -3 \\ \underline{2x + y - z = 6 \quad +} \\ \quad 2x + y = 3 \\ \Leftrightarrow \quad x + y = 1 \end{array} \qquad \text{....... (5)}$$

Persamaan (4) dan (5) membentuk SPLDV x dan y

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Nilai x dicari dengan mengeliminasi peubah y :

$$\begin{array}{r|l|l} 2x + y = 3 & x1 & 2x + y = 3 \\ x + y = 1 & x2 & \underline{2x + 2y = 2 \quad -} \\ & & \quad -y = 1 \\ & & \quad y = -1 \end{array}$$

Nilai z dicari dengan cara mensubstitusikan nilai $x = 2$ dan $y = -1$ ke dalam salah satu persamaan semula. Misalkan persamaan $x - y + z = 6$, diperoleh

$$2-(-1)+z=6$$
$$\rightarrow \quad z = 3$$

Jadi, himpunan penyelesaian SPLTV di atas adalah $\{(2,-1,3)\}$. Perhatikan bahwa hasil ini sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode substitusi.

D. Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat

Sistem persamaan yang terdiri atas sebuah persamaan linear dan sebuah persamaan berbentuk kuadrat yang masing-masing bervariabel dua disebut sistem persamaan linear dan kuadrat. Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat, selanjutnya dalam buku ini disingkat dengan SPLK.

Berdasarkan karakteristik dari bentuk bagian kuadratnya, SPLK dapat dikelompokan sebagai berikut:

1. SPLK dengan bagian Kuadrat Berbentuk Eksplisit

Bentuk umum SPLK dengan bagian kuadratnya berbentuk eksplisit dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y = px^2+qx+r \end{cases}$$

Dengan *a, b, p, q* dan *r* merupakan bilangan-bilangan real.

Secara umum, penyelesaian atau himpunan penyelesaian dari SPLK dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut:

Langkah 1

Substitusikan bagian linear $y = ax + b$ ke bagian kuadrat $y = px^2+qx+r$, sehingga diperoleh

$$ax+b = px^2+qx+r$$
$$\Leftrightarrow px^2+qx-ax+r-b=0$$
$$\Leftrightarrow px^2+(q-a)x+(r-b)=0$$, merupakan persamaan kuadrat dalam *x*.

Langkah 2

Nilai-nilai *x* pada langkah 1 (jika ada) di substitusikan ke persamaan $y = ax + b$. Nilai *x* yang memenuhi persamaan kuadrat $px^2+(q-a)x+(r-b)=0$, disebut akar-akar dari persamaan itu. Banyaknya nilai *x* (banyaknya akar) dari persamaan kuadrat tersebut ditentukan oleh nilai diskriminan $D = (q-a)^2 - 4p(r-b)$. Dengan demikian, banyaknya anggota dalam himpunan penyelesaian SPLK

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y = px^2+qx+r \end{cases}$$

Ditentukan oleh nilai diskriminan $D = (q - a)^2 - 4p(r - b)$ sebagai berikut:

1. Jika D > 0 maka SPLK mempunyai dua anggota dalam himpunan penyelesaiannya.
2. Jika D = 0, SPLK tepat mempunyai satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya.
3. Jika D < 0 maka SPLK tidak mempunyai anggota dalam penyelesaiannya (himpunan kosong).

Contoh:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Substitusikan bagian linear $y = x + 2$ ke bagian kuadrat $y = x^2$, diperoleh:

$$x + 2 = x^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0,$

Merupakan persamaan kuadrat dalam x

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

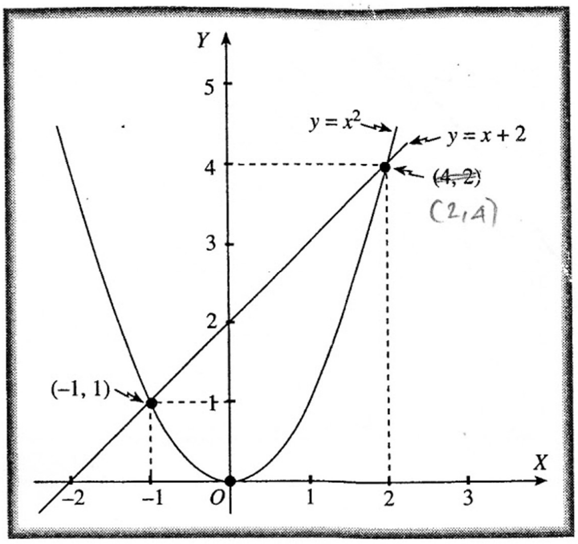
$\Leftrightarrow \; x = 1 \;\; atau \;\; x = 2$

Substitusikan $x = -1$ atau $x = 2$ ke persamaan $y = x + 2$, diperoleh:

$y = -1 + 2$ atau $y = 2 + 2$

$\Leftrightarrow y = 1$ $\quad y = 4$

Jadi, himpunan penyelesaian SPLK adalah $\{(-1, 1), (2, 4)\}$.



2. SPLK dengan bagian Kuadrat Berbentuk Implisit

Suatu persamaan dua peubah x dan y dikatakan berbentuk eksplisit jika persamaan itu dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ atau $x = f(y)$.

Contoh :

Persamaan dua peubah (x dan y) dalam bentuk eksplisit:

i) $y = 3x - 2$
ii) $x = 5 - 4y$
iii) $y = x^2 - 4x + 5$
iv) $x = 3y^2 + 6y - 2$

Persamaan dua peubah x dan y dikatakan berbentuk implisit jika persamaan itu tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ atau $x = f(y)$. Persamaan implisit dinyatakan dalam bentuk $f(x, y) = 0$.

Contoh :
Persamaan dua peubah (x dan y) dalam bentuk implisit:

i) $x^2 + y^2 + 8 = 0$
ii) $x^2 + y^2 + 2x - y = 0$
iii) $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$
iv) $2x^2 - xy + y^2 + 3x + y - 4 = 0$

Secara umum, SPLK dengan bagian kuadrat berbentuk implisit dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{cases} px + qx + r = 0 \;\ldots\ldots \textit{bagian linear} \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \;\ldots\ldots \textit{bagian kuadrat berbentuk implisit} \end{cases}$$

Dengan *a, b, c, d, f, p, q* dan *r* merupakan bilangan-bilangan real.

Bagian kuadrat yang berbentuk implisit ada dua kemungkinan, yaitu:

a. Bentuk implisit yang tak dapat difaktorkan
b. Bentuk implisit yang dapat difaktorkan

a. *SPLK dengan Bagian Kuadrat Berbentuk Implisit yang tak dapat difaktorkan*

Penyelesaian atau himpunan penyelesaian SPLK dengan bagian kuadrat berbentuk implisit yang tak dapat difaktorkan dapat ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Pada bagian persamaan linear, nyatakan x dalam y atau y dalam x.

Langkah 2

Substitusikan x atau y pada langkah 1 ke bagian bentuk kuadrat, sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam x atau y.

Langkah 3

Selesaikan persamaan kuadrat yang diperoleh pada langkah 2, kemudian nilai-nilai yang didapat di substitusikan ke persamaan linear.

b. *SPLK dengan bagian kuadrat berbentuk implisit yang dapat difaktorkan*

Langkah-langkah untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLK dengan bagian kuadrat berbentuk implisit yang dapat difaktorkan adalah sebagai beriku.

Langkah 1

Nyatakan bagian bentuk kuadratnya ke dalam faktor-faktor dengan ruas kanan sama dengan nol, sehingga diperoleh $L_1.L_2 = 0$.
$L_1.L_2 = 0 \Leftrightarrow L_1 = 0$ atau $L_2 = 0$, dengan $L_1\ dan\ L_2$ masing-masing berbentuk linear.

Langkah 2

Bentuk-bentuk linear yang diperoleh pada langkah 1 digabungkan dengan persamaan linear semula, sehingga diperoleh dua buah SPLDV. Kemudian selesaikan masing-masing SVLDV itu.

Contoh:

$$\begin{cases} x - y = 3 & \ldots bagian\, linear \\ x^2 - 4xy + 4xy^2 - 25 = 0 & \ldots bagian\, kuadrat\, berbentuk\ implisit\ yang\ dapat\ difaktorkan \end{cases}$$

Bagian kuadrat dapat difaktorkan sebagai berikut.

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - 2y)^2 - 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y + 5)(x - 2y - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0 \text{ atau } x - 2y - 5 = 0$$

Jika hasil ini digabungkan dengan persamaan linear semula, diperoleh dua SPLDV, yaitu

$$\begin{cases} x - y \quad = 3 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} x - y \quad = 3 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Selanjutnya masing-masing SPLDV itu diselesaikan:

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ x - 2y = -5 \quad - \\ \hline y = 8 \end{array}$$

Substitusi y = 8 ke persamaan $x - y$ = 3, diperoleh x – 8 = 3 ⇔ x = 11.
SPLDV yang pertama ini memberikan penyelesaian (11, 8).

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ x - 2y = 5 \quad - \\ \hline y = -2 \end{array}$$

Substitusi y = -2 ke persamaan x – y = 3, diperoleh x – (-2) = 3 ⇔ x = 1.

SPLDV yang kedua ini memberikan penyelesaian (1, -2).
Jadi, himpunan penyelesaian SPLK itu adalah $\{(11, 8), (1, -2)\}$.

E. Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat (SPKK)

Sistem persamaan yang terdiri atas dua persamaan yang masing-masing berbentuk kuadrat dan tiap persamaan bentuk kuadrat itu memuat dua variabel disebut Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat.

Bentuk SPKK yang paling sederhana itu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ldots \text{Bagian kuadrat pertama} \\ y = px^2 + qx + r \ldots \text{Bagian kuadrat kedua} \end{cases}$$

Dengan *a, b, c, p, q* dan *r* merupakan bilangan-bilangan real. Secara umum, penyelesaian atau himpunan penyelesaian dari SPKK

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$

Dapat ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1 :

Substitusi bagian kuadrat yang pertama $y = ax^2 + bx + c$ ke bagian kuadrat yang kedua $y = px^2 + qx + r$, diperoleh:

$$ax^2 + bx + c \quad = px^2 + qx + r$$
$$\Leftrightarrow ax^2 - px^2 + bx - qx + c - r = 0$$
$$\Leftrightarrow (a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0,$$ merupakan persamaan kuadrat dalam *x*.

Langkah 2:

Nilai-nilai *x* yang diperoleh pada langkah 1(jika ada) disubstitusikan kebagian kuadrat yang pertama $y = ax^2 + bx + c$ atau bagian kuadrat yang kedua $y = px^2 + qx + r$ (pilihlah bentuk yang sederhana).
Banyaknya nilai *x* (banyaknya akar real) dari persamaan kuadrat

$$(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$$

Ditentukan oleh nilai diskriminan $D = (b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)$.

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian dari SPKK berikut!

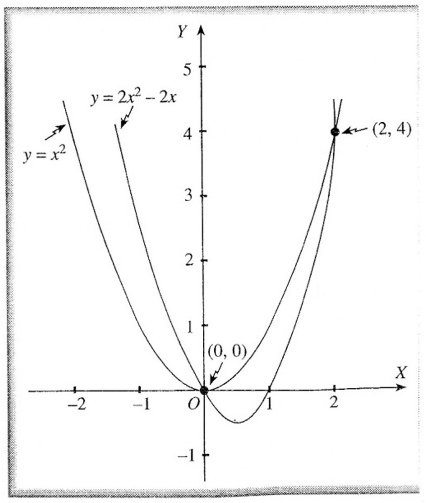
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 - 2x \end{cases}$$

Penyelesaian:
Substitusi bagian kuadrat yang pertama $y = x^2$ ke bagian kuadrat yang kedua $y = 2x^2 - 2x$ diperoleh:

$$x^2 = 2x^2 - 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ atau } \quad x = 2$$

Substitusi x = 0 atau x = 2 ke bagian kuadrat yang pertama $y = x^2$.
Untuk x = 0, diperoleh $y = (0)^2 = 0$ => (0,0)
Untuk x = 2, diperoleh $y = (0)^2 = 4$ => (2, 4)
Jadi, himpunan penyelesaian SPKK itu adalah $\{(0,0),(2,4)\}$.

Anggota-anggota dari himpunan penyelesaian SPKK di atas secara geometris dapat ditafsirkan sebagai koordinat titik potong antara parabola $y = x^2$ dengan parabola $y = 2x^2 - 2x$.



F. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

1. Masalah yang dihadapi siswa saat belajar Sistem Persamaan dan Fungsi Kuadrat
   a) Kesalahan konseptual
      1) Kesalahan memahami definisi dan sifat-sifat variabel dari suatu bentuk aljabar.
      2) Kesalahan menginterpretasikan suatu representasi dari bentuk aljabar.
      3) Tidak mampu memaknai hubungan-hubungan sifat pada bentuk aljabar.
   b) Kesalahan Prosedural
      1) Kesalahan dalam perhitungan yaitu operasi hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bentuk aljabar.
      2) Ketidakmampuan siswa dalam menuliskan langkah-langkah kerja dengan teratur.
      3) Kesalahan dalam menerapkan aturan, prinsip atau rumus dalam operasi aljabar.
      4) Siswa mengalami kesulitan dalam megubah soal dalam permasalahan sehari-hari ke model matematika.
2. Solusi untuk mengatasi kesulitan belajar pada siswa
   a) Siswa dituntut untuk bisa memahami konsep matematika yang dipelajari, dengan bimbingan guru.
   b) Menyampaikan konsep materi dengan bahasa yang mudah dimengerti siswa.

c) Guru bisa memberikan contoh konkret dalam kehidupan sehari-hari tentang Sistem Persamaan dan Fungsi Kuadrat.

Latihan Soal

1. Tenyukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi!
$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$
2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $2x + 3y = 6$ dan$2x - y = -2$ dengan metode grafik.
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut
$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 12 \end{cases}$$
jika dimisalkan $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} =$
4. Pak Yudi membeli tiket masuk tempat rekreasi sebanyak 2 lembar untuk dewasa dan 3 lembar untuk anak-anak dengan harga Rp. 10.250,00. Joko membeli tiket 3 lembar untuk dewasa dan 1 lembar untuk anak-anak dengan harga Rp. 9.250,00. Jika Andika membeli tiket 1 lembar untuk dewasa dan 1 lembar untuk anak-anak dengan menggunakan uang selembar Rp. 10.000,00 berapakah uang kembalian yang andika terima?
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.
$$\begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ x^2 + 6x - y + 5 = 0 \end{cases}$$
6. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan beriku!
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = -x^2 - 6x - 8 \end{cases}$$
7. Uang Adinda Rp. 40.000,00 lebih banyak dari uang Binari ditambah dua kali uang Cindy. Jumlah uang Adinda, Bunari dan Cindy Rp. 200.000,00, selisih uang Binary dan Cindy Rp. 10.000,00. Jumlah uang Adinda dan Binari adalah ?
8. Diketahui x_1 dan y_1 memenuhi sistem persamaan
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$$

BAB V
PERTIDAKSAMAAN

A. Pendahuluan

Sistem persamaan dan pertidaksamaan tidak lepas dari peristiwa dikehidupan sehari-hari. Apabila kita berbelanja di pasar dan dari sekumpulan barang belanjaan kita mendapatkan suatu harga tertentu, secara tidak langsung kita telah merasakan kegunaan dari sistem persamaan dan pertidaksamaan. Begitu juga pada saat kita menikmati makan siang di sebuah restoran cepat saji dan disana ditawarkan beberapa paket makanan yang merupakan kombinasi dari beberapa jenis makanan. Setiap paket pasti memiliki harga tertentu dan kita tidak tahu harga setiap makanan yang menyusun paket makanan tersebut. Harga setiap makanan yang menyusun paket makanan tersebut dapat ditentukan menggunakan sistem persamaan dan pertidaksamaan.

Salah satu tokoh yang berperan dalam pengembangan sistem persamaan dan pertidaksamaan adalah Gabriel Cramer. Gabriel Cramer adalah seorang matematikawan dari Swiss. Ia lahir di Geneva, Swiss, 31 Juni 1704. Keahlian Cramer tentang matematika tampak menonjol sejak ia masih muda. Umur 18 tahun, Cramer telah menerima gelar doktor. Cramer juga banyak menduduki jabatan penting dalam bidang matematika pada institusi tempatnya bekerja.

Tahun 1750, Cramer mempublikasikan bukunya yang berjudul "*Introduction al'analyse des lignes courbes algebricue"*. Cramer menuliskan suatu teorima dalam aljabar linier yang berisi penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan determinan. Teorima itu dikenal dengan nama aturan Cramer. Dua tahun setelah mempublikasikan bukunya, Gabriel Cramer meninggal dunia, tepatnya pada tanggal 4 januari 1752 di Bagnols-sur-Ceze, Prancis.

B. Pertidaksamaan

Istilah pertidaksamaan berbeda dengan istilah ketidaksamaan. Ketidaksamaan adalah suatu pernyataan yang memuat tanda ketaksamaan, sedangkan pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang memuat tanda ketaksamaan. Berikut adalah contoh ketidaksamaan dan pertidaksamaan:

Ketidaksamaan	Pertidaksamaan
6 > 4	6x + 8 > 4
-7 < -5	-7y - 3 < -5
10 ≥ 12	10y - 9 ≥ 12x
11 < 9	11 < 9x + 6y
-8 > 8	-8x > 8y
14 ≤ 7	14x - 7 ≤ 7x

Tabel 1. Contoh Ketidaksamaan dan Pertidaksamaan

Suatu pertidaksamaan belum diketahui nilai kebenarannya karena masih memuat variabel. Pertidaksamaan akan diketahui nilai kebenarannya jika variabel tersebut diganti oleh suatu konstanta. Misal jika diketahui suatu pertidaksamaan $2x + 4 \geq 2$, maka:

1. Jika x diganti 1 maka diperoleh $6 \geq 2$, ini merupakan suatu pertnyataan bernilai benar.
2. Jika x diganti 3 maka diperoleh $10 \geq 2$, ini merupakan suatu pertnyataan bernilai benar.
3. Jika x diganti -2 maka diperoleh $0 \geq 2$, ini merupakan suatu pertnyataan bernilai salah.
4. Jika x diganti -10 maka diperoleh $-16 \geq 2$, ini merupakan suatu pertnyataan bernilai salah.

Misalkan suatu pertidaksamaan memuat suatu variabel x. Jika pertidaksamaan tersebut menjadi pernyataan bernilai benar setelah x diganti dengan suatu bilangan real a maka a disebut penyelesaian pertidaksamaan. Menyelesaikan suatu pertidaksamaan berarti mencari semua kemungkinan penyelesaian pertidaksamaan. Penyelesaian pertidaksamaan akan berupa interval, yaitu kumpulan bilangan real yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Jenis-jenis interval dapat kamu lihat dalam tabel berikut.

Notasi	Definisi	Grafik	Keterangan
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b	Selang terbuka
[a,b]	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b	Selang tertutup
[a,b)	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b	Selang setengah terbuka
(a,b]	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b	Selang setengah terbuka
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a	Selang terbuka
[a, ∞)	$\{x \mid x \geq a\}$	a	Selang tertutup
(-∞, b)	$\{x \mid x < b\}$	b	Selang terbuka
(-∞, b]	$\{x \mid x \leq b\}$	b	Selang tertutup
(-∞, ∞)	R		Selang terbuka

Gambar 1. Jenis-jenis Interval

Salah satu metode yang umum dipakai untuk memyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah dengan cara mengganti pertidaksamaan tersebut dengan pertidaksamaan lain yang ekuivalen. Dua pertidaksamaan dikatakan ekuivalen jika kedua pertidaksamaan tersebut memiliki penyelesaaain yang sama.

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaiaan pertidaksamaan $-3x + 2 < 10$.

Penyelesaian:

$-3x + 2 < 10$
$\Leftrightarrow (-3x + 2) - 2 < 10 - 2$
$\Leftrightarrow -3x < 8$
$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) > \left(-\frac{1}{3}\right)8$
dikalikan dengan negatif, tanda ketidaksamaan berubah
$\Leftrightarrow x > -\frac{8}{3}$
Jadi, himpunan penyelesaiaan pertidaksamaan $-3x + 2 < 10$ adalah semua bilangan real sedemikian sehingga $x > -\frac{8}{3}$ atau HP= $\left\{x \middle| x > -\frac{8}{3}, x \in R\right\}$.

C. Pertidaksamaan Bentuk Pecahan Aljabar

Perhatikan bentuk pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut ini,

1. $-\dfrac{4}{3x} > 2$
2. $-\dfrac{x+4}{3x-6} < 1$
3. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} \leq 0$

Bentuk-bentuk pertidaksamaan diatas merupakan pertidaksamaan dalam bentuk pecahan aljabar. Bentuk umum pertidaksamaan yang berbentuk pecahan aljabar adalah $\dfrac{u(x)}{v(x)}(< ; \leq ; \geq ; >)$ p, dengan *u(x)* dan *v(x)* adalah fungsi-fungsi bervariabel *x* dan $v(x) \neq 0$. Tanda ketaksamaan $(<;\ \leq;\ \geq;\ >)$ hanya berlaku salah satu.

Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan bentuk pecahan adalah sebagai berikut:

1. Jika ruas kanan tidak nol, ubahlah ruas kanan pertidaksamaan tersebut menjadi nol.
2. Menyederhanakan ruas kiri dengan cara memfaktorkan pembilang dan penyebut.
3. Menentukan nilai-nilai pembuat nol dari pembilang dan penyebut.
4. Meletakkan nilai-nilai pembuat nol pada garis bilangan.
5. Menggunakan sebarang titik uji, berilah tanda (+) untuk pertidaksamaan yang bernilai lebih dari nol, dan berilah tanda (-) untuk pertidaksamaan yang bernilai kurang dari nol.
6. Himpunan penyelesaiaan pertidaksamaan adalah interval yang memenuhi nilai yang sesuai dengan tanda pertidaksamaan bentuk pecahan.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 2$.

Penyelesaian:

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2 \text{ ; syarat } x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

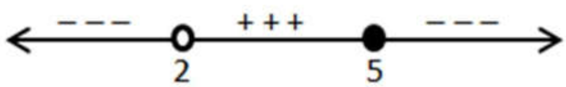
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+5}{x-2} \geq 0$$

Nilai-nilai pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 5 dan 2.



Pada soal tersebut, tanda ketidaksamaannya adalah $\geq$ maka himpunan penyelesaiannya berada pada interval bertanda positif. Jadi HP = $\{X | 2 < X \leq 5, X \in R\}$, dalam notasi interval ditulis $(2, 5]$.

D. Pertidaksamaan Bentuk Akar

Suatu pertidaksamaan disebut pertidaksamaan bentuk akar jika bentuk akar tersebut memuat variabel. Bentuk umumnya adalah sebagai berikut:

1. $\sqrt{ax+b}$ $(<, \leq, \geq, >)$ c dengan a, b, c $\in R$ dan $ax + b \geq 0$ (syarat akar).
2. $\sqrt{ax+b}$ $(<, \leq, \geq, >)\sqrt{px+q}$ dengan a, b, p, q $\in R$ dan
   $ax + b \geq 0, px + q$ 0 (syarat akar).
3. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(<, \leq, \geq, >)\sqrt{px^2+qx+r}$ dengan a, b, c, p, q, r $\in R$ dan
   $ax^2 + bx + c$ 0, $px^2 + qx + r$ 0 (syarat akar).

Tanda ketidaksamaan $(<, \leq, \geq, >)$ hanya berlaku salah satu. Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan bentuk akar sebagai berikut:

1. Kuadratkan kedua ruas sehingga bentuk akarnya hilang
2. Tentukan penyelesaiaan dari pertidaksamaan yang diperoleh akibat kedua ruas dikuadratkan tersebut. Jika dibutuhkan gambarkan penyelesaian tersebut dalam garis bilangan.
3. Selesaikan syarat akar dan jika dihubungkan gambarkan hasil penyelesaian tersebut dalam garis bilangan
4. Buatlah irisan dari garis-garis bilangan yang telah dibuat tersebut dan tentukan penyelesaiannya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x-3} < 2$

Penyelesaian:

$\sqrt{x-3} < 2 \leftarrow$ kuadratkan kedua ruas sehingga diperoleh

$\Leftrightarrow x - 3 < 4$

$\Leftrightarrow x < 7 \ldots (1)$

Syarat akar:
$x - 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq 3 \ldots (2)$

Dari (1) dan (2) diperoleh penyelesaiannya adalah semua nilai x yang memenuhi $x < 7\ dan\ \ x \geq 3$.

Jadi himpunan pxenyelesaiannya adalah HP = $\{x|3 \leq x < 7, x \in R\}$.

E. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Sebelum membahas pertidaksamaan nilai mutlak, kita harus mengetahui dahulu apa itu nilai mutlak. Nilai mutlak dari sembarang bilangan $x \in R$ yang dinotasikan dengan $|x|$ didefinisikan sebagai berikut:

$$|x| = \begin{cases} x, jika\ x \geq 0 \\ -x, jika\ x < 0 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi di atas, maka nilai mutlak tidak pernah bernilai negatif.

Contoh:
1. Nilai mutlak dari 4 adalah $|4|$ = 4 sebab 4$\geq$ 0
2. Nilai mutlak dari 0 adalah $|0|$ = 0 sebab 0$\geq$ 0
3. Nilai mutlak dari -9 adalah $|-9|$ = -(-9)=9 sebab -9$<$ 0

Bentuk umum pertidaksamaan nilai mutlak adalah sebagai berikut:
1. $|ax + b|(<, >, \leq, \geq)c$ dengan a, b, c ∈ R
2. $|ax + b|(<, >, \leq, \geq)|px + q|$ dengan a, b, p, q ∈ R

Sifat-sifat nilai mutlak yang sangat diperlukan dalam mencari himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan nilai mutlak adalah sebagai berikut:
1. $|-x| = |x|$
2. $-|x| \leq x \leq |x|$
3. $|x| = \sqrt{x^2}$
4. $|x|^2 = x^2$
5. Untuk sembarangan x, a$\in R$ dan a$>$ 0, berlaku sebagai berikut
   a. Jika $|x| \leq a\ maka - a \leq\ x \leq a$
   b. Jika $|x| \geq a\ maka\ x \leq\ -a\ atau\ x \geq a$
6. Untuk sebarang x,y $\in R$ berlaku sebagai berikut
   a. Jika $|x| \leq |y|\ maka \leq\ x^2 \leq y^2$
   b. $|x - y| = |y - x|$

c. Jika $|x| = |y|$ $maka$ $x = \pm y$
d. $|xy| = |x||y|$
e. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$
f. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|x + 1| < 2$

Penyelesaian:

Pertidaksamaan $|x + 1| < 2$
Menurut sifat 5a mendapatkan
$-2 < x + 1 < 2$
$\Leftrightarrow -2 - 1 < x + 1 - 1 < 2 - 1$
$\Leftrightarrow -3 < x < 1$

Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak di atas adalah $\{x | -3 < x < 1, x \in R\}$.

F. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

Permasalahan yang sering dihadapi siswa dalam mempelajari materi pertidaksamaan antaralain:

1. Siswa merasa kesulitan saat menyelesaikan persoalan pertidaksamaan yang berbentuk akar.
2. Siswa merasa kesulitan saat menyelesaikan soal pertidaksamaan yang berupa soal cerita.
3. Siswa merasa kesulitan mengubah informasi dalam soal cerita menjadi model matematika.

Solusi yang bisa dilakukan untuk mengatasi kesulitan belajar siswa antaralain:

1. Guru harus membelajarkan tentang konsep pertidaksamaan saat proses belajar mengajar, bukan menyuruh siswa untuk sekedar menghafal saja.
2. Guru memberikan variasi soal, tidak hanya memberi soal singkat saja tetapi juga diberi latihan soal cerita karena soal cerita dapat membantu perkembangan logika berfikir siswa dalam memecahkan suatu permasalahan.

Secara umum, guru dapat membelajarkan materi pertidaksamaan dengan cara sebagai berikut:

1. Ingatkan siswa tentang materi pertidaksamaan yang sudah mereka peroleh di SMP.
2. Berikan motivasi kepada siswa dalam mempelajari pertidaksamaan dengan mengaitkan materi pertidaksamaan tersebut pada kejadian-kejadian dikehidupan sehari-hari.
3. Ajak siswa untuk mencaritahu penggunaan/aplikasi materi pertidaksamaan dalam kehidupan sehari-hari.

4. Berikan contoh kasus/permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan pertidaksamaan.
5. Mintalah siswa untuk memecahkan/menyelesaikan permasalahan tersebut menggunakan konsep pertidaksamaan.

G. Contoh Aplikasi Pertidaksamaan

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari atau bidang ilmu yang lain dapat diselesaikan dengan menerjemahkannnya menjadi model matematika yang berbentuk pertidaksamaan. Berikut ini beberapa contoh permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan model matematika berbentuk pertidaksamaan.

No.	Permasalahan	Alternatif Penyelesaian
1	Hubungan pengukuran temperatur menggunakan skala Celsius dan Fahrenheit ditunjukkan dengan $C = \frac{5}{9}(F - 32°)$. Jika suhu yang dinyatakan dalam skala Celsius menunjukkan interval $30° \leq C \leq 50°$, tentukan interval yang ditunjukkan skala Fahrenheit.	$30° \leq C \leq 50°$ $\Leftrightarrow 30° \leq \frac{5}{9}(F - 32°) \leq 50°$ $\Leftrightarrow 30°.\frac{9}{5} \leq (F - 32°) \leq 50°.\frac{9}{5}$ $\Leftrightarrow 54° \leq (F - 32°) \leq 90°.$ $\Leftrightarrow 54° + 32° \leq F \leq 90° + 32°$ $\Leftrightarrow 86° \leq F \leq 122°$ Jadi, interval yang ditunjukkan dalam skala Fahrenheit adalah $86° \leq F \leq 122°$.
2	Santi berbelanja di toko peralatan sekolah dengan uang yang tersedia Rp 250.000,00. Harga setiap barang di toko tersebut telah tersedia di daftar harga barang sehingga Santi dapat memperkirakan peralatan sekolah apa saja yang sanggup dia beli dengan uang yang dia miliki. Berdasarkan daftar harga, jik Santi membeli dua seragam sekolah dan tiga buku maka dia masih mendapatkan uang kembalian. Bagaimanakah model harga belanjaan Santi?	Misalkan: X = harga seragam sekolah Y = harga buku Santi membeli dua seragam sekolah dan tiga buku. Uang Santi Rp 250.000,00 dan masih mendapat uang kembalian, maka model harga belanjaan Santi tersebut adalah: 2x + 3y < Rp 250.000,00

Latihanm Soal

Kerjakanlah Soal di bawah dengan benar!

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $4x - 5 < 2x + 8$.
2. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-6 < 2x - 2 < 4$.
3. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{x+4}{x^2 - 3x - 10} < 0$.
4. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x+2} > \sqrt{8 - 2x}$.
5. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq x + 4$.

6. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|2x - 1| > |x - 3|$.
7. Pada pelajaran Fisika diketahui bahwa hukum Ohm menyatakan hubungan $R = \frac{V}{I}$ dengan V dalam volt, I dalam ampere, dan R dalam Ohm. Jika diketahui V= 110 volt, berapakah R untuk $1 \leq 10$?

8. Seorang bayi lahir prematur disebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Bayi tersebut dirawat di dalam inkubator agar suhu tubuh bayi tetap stabil. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama dua hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100 – 2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0,2°C maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator tersebut!

BAB VI
TRIGONOMETRI

A. Pendahuluan

Berbicara tentang trigonometri tidak terlepas dari konsep segitiga. Kata trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigono* artinya "tiga sudut" dan *metro* yang berarti "mengukur". Jadi, *trigonometri* adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometrik, seperti sinus, cosinus dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya. Bagi beberapa orang trigonometri adalah bagian dari geometri. Sulit ditelusuri siapa yang pertama kali mengklaim penemu ilmu ini yang pasti ilmu ini sudah ada sejak jaman Mesir dan Babilonia 3000 tahun lalu.

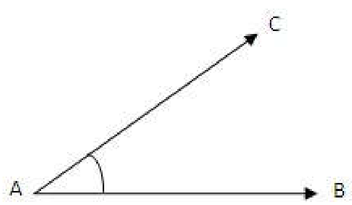
Ilmuan Yunani di masa Helenistik, Hipparchus (190 SM – 120 SM) adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang trigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Adapun rumusan sinus, cosinus dan tangen di formulasikan oleh Surya Siddhanta ilmuan yang berasal dari India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang trigonometri disempurnakan oleh ilmuan-ilmuan lain di jaman berikutnya. Trigonometri hanya mempelajari sisi-sisi dan sudut pada segitiga terutama segitiga siku-siku. Materi trigonometri sebenarnya termasuk matematika terapan yang umumnya berguna di bidang navigasi, kontruksi dan surveying lahan tanah.

Pada bidang geometri dan pengukuran di SMP telah dipelajari seperti menggambar besar sudut, menentukan jenis sudut, menggambar sudut, menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku khusus yang salah satu sudutnya 30^0, 45^0, dan 60^0, mengenali bahwa sudut satu putaran sama dengan 360^0, menentukan hubungan antara sudut pusat dengan panjang busur dan luas sektor. Setelah mempelajari materi tersebut kemudian akan di lanjutkan pada tingkat SMA dengan materi pokok: perbandingan dan fungsi trigonometri.

Pada materi perbandingan dan fungsi trigonometri memiliki Kompetensi Dasar yaitu siswa dituntut untuk menggunakan sifat, aturan, grafik dan manipulasi aljabar dalam pemecahaan masalah trigonometri.

B. Ukuran Sudut

Sudut dapat dibentuk oleh dua buah sinar garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit). Seperti pada gambar berikut:

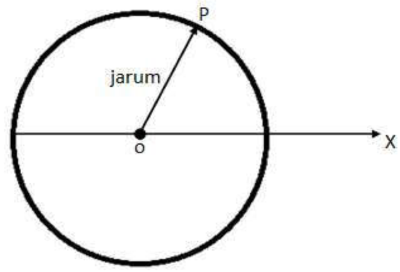


Gambar 6.1

Sudut A dibentuk oleh sinar AB dan AC dengan titik pangkal A. Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan, yaitu ukuran sudut dalam derajat dan ukuran sudut dalam radian.

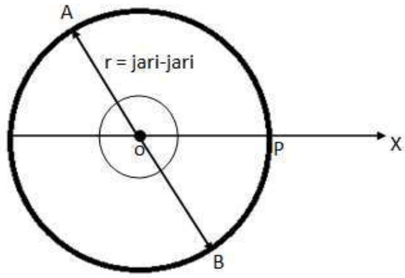
1. Ukuran Sudut dalam Derajat

Besar sudut dalam ukuran derajat dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep sudut sebagai jarak putar. Pada gambar dibawah ini diperhatikan sebuah jarum jam yang dapat berputar bebas terhadap titik pangkal jarum. Titik pangkal ini diberi nama titik O dan titik O terletak pada garis mendatar OX. Misalkan titik ujung jarum mula-mula berada pada titik P (P terdapat pada garis OX) sehingga sudut yang dibentuk oleh jarum terhadap garis OX sama dengan nol derajat (0^0). Kemudian jarum berputar dengan berlawanan arah dengan jarum jam sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 6.2. sudut antara jarum dengan garis OX merupakan jarak jarum dan sudut tersebut akan semakin besar jika karak putarannya diperbesar



Gambar 6.2

Ukuran besarsudut ditentukan oleh jarak putar jari-jari lingkaran terhadap garis OX. Jika jarus digerakkan sehingga ujungnya yang semula di P berpindah ke A, kemudian ke B dan kembali lagi ke A maka, dikatakan jarum ini bergerk dalam satu putara.



Gambar 6.3

Panjang lintasan yang ditelusuri oleh titik ujung jarum sama dengan keliling ingkaram dan besar sudut yang diputari oleh jarum jam sama dengan 360^0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Satu derajat (1^0) didefiniskan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis $1^0 = \frac{1}{360}$ putaran. Berdasarkan definisi tersebut, jelas bahwa 1 putaran = 360^0 dan untuk sudut-sudut yang kurang dari satu putaran dapat ditentukan besar sudutnya jika diketahui seperberapanya jarak putaran penuh.

Berdasarkan kesimpulan diatas jelas bahwa 1 putaran = 360^0 sedangkan, untuk sudut-sudut yang kurang dari satu putaran dapat ditentukan besar sudutnya jika diketahui seperberapa jarak putarannya terhadap satu kali putaram penuh, misalkan:

Setengah putaran = $\frac{1}{2} \times 360^0$ = 180^0 disebut sudut lurus

Sepertiga putaran = $\frac{1}{3} \times 360^0$ = 120^0

Seperempat putaran = $\frac{1}{4} \times 360^0$ = 90^0 disebut sudut siku-siku, dan seterusnya.

Selain itu, ada ukuran yang lebih kecil dari ukuran derajat yaitu ukuran menit (lambangnya ‘) dan ukuran detik (lambangnya “).

Ukuran-ukuran sudut dalam derajat, menit dan detik mengikuti aturan sebagai berikut.

1 derajat = 60 menit ditulis 1^0 = 60’ atau

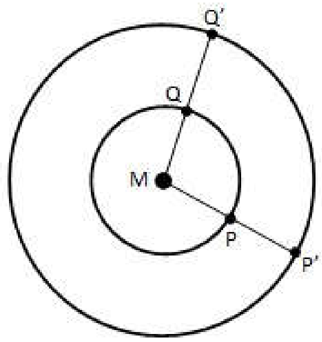
1 menit = $\frac{1}{60}$ derajat ditulis 1’ = $\frac{1}{60}^0$

1 menit = 60 detik ditulis 1’ = 60” atau

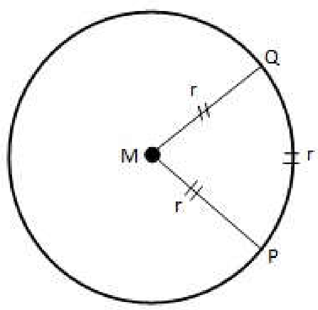
1 detik = $\frac{1}{60}$ menit ditulis 1” = $\frac{1}{60}'$

2. Ukuran sudut dalam radian

Perhatikan gambar dibawah ini:



Gambar 6.4



gambar 6.5

Titik M adalah pusat dari kedua lingkaran itu, MP dan MP’ merupakan jari-jari lingkaran kecil dan jari-jari lingkaran besar. Pada gambar 6.4 tampak bahwa juring atau sektor P’MQ’ diperoleh dari juring PMQ yang diperbesar dan berpusat di M. Karena juring PMQ sebangun dengan juring P’MQ’ maka menghasilkan:

$$\frac{panjang\ busur\ PQ}{MP} = \frac{panjang\ busur\ P'Q'}{MP'}$$

Perbandingan tersebut tidak dipengaruhi oleh panjang jari-jari lingkaran tetapi, hanya ditentukan besar $\angle$PMQ. Nilai perbandingan $\frac{panjang\, busur\, PQ}{MP}$ merupakan ukuran yang dinyatakan dalam ukuran radian.

Perhatikan gambar 6.5, misalkan panjang busur PQ = jari-jari lingkaran = r atau panjang busur PQ = MP = r sehingga, nilai perbandingannya $\frac{panjang\, busur\, PQ}{MP} = \frac{r}{r} = 1$ dengan demikian besar sudut PMQ sama dengan 1 radian

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:
Satu radian (1 rad) didefinisikan sebagai ukuran sudut pada bidang datar yang berada diantara dua jari-jari lingkaran dengan panjang busur sama dengan panjang jari-jari lingkaran itu.

3. Mengubah Ukuran Sudut dari Derajat ke Radian dan Sebaliknya

Untuk mengubah ukuran sudut dari derajat ke radian yaitu perlu diingat bahwa $180^0 = \pi$ radian, maka diperoleh:

$1^0 = \frac{\pi}{180} radian$ dan 1 radian = $\frac{180^0}{\pi}$

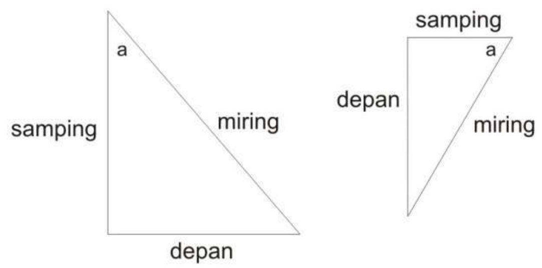
Dalam beberapa perhitungan seringkali digunakan nilai pendekatan untuk $\pi \cong 3{,}14159$ sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$1^0 \cong \frac{3{,}14159}{180} radian = 0{,}017453$ atau 1 radian $\cong \frac{180^0}{3{,}14159} = 57{,}296^0$.

Pada persamaan digunakan simbol $\cong$ yang menyatakan bahwa nilai tersebut merupakan nilai pendekatan.

C. Perbandingan Trigonometri

1. Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku



Gambar 6.6

Dua gambar tersebut adalah segitiga siku-siku. Dan salah satu sudutnya kita namakan sudut a. Segitiga siku-siku mempunyai tiga sisi. Dan kita akan menamainya dengan sisi miring, depan dan samping.

Sisi miring yaitu sisi yang terletak di depan sudut 90 derajat. Sisi depan adalah sisi di depan sudut (untuk gambar tersebut, terletak di depan sudut a). sisi samping adalah sisi yang terletak di samping sudut a.
Pada segitiga siku-siku, berlaku perbandingan trigonometri sebagai berikut.

$\sin\alpha = \dfrac{depan}{miring}$ cosec $\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ maka cosec $\alpha = \dfrac{miring}{depan}$

$\cos\alpha = \dfrac{samping}{miring}$ sec $\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ maka sec $\alpha = \dfrac{miring}{samping}$

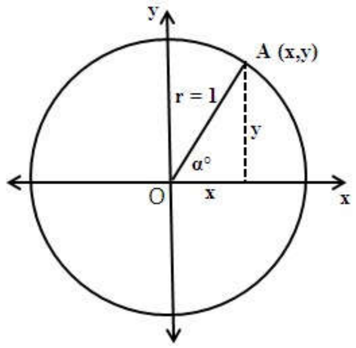
$\tan\alpha = \dfrac{depan}{samping}$ cot $\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ maka cot $\alpha = \dfrac{samping}{depan}$

Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku ini akan sangat berguna untuk mencari unsur-unsur yang belum diketahui pada segitiga siku-siku.

2. *Menentukan Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Khusus (Istimewa)*

Sudut khusus atau sering dikenal dengan sudut istimewa adalah suatu sudut dimana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara langsung tanpa menggunakan daftar trigonometri atau kalkulator. Sudut-sudut yang dimaksud adalah $0^0, 30^0, 45^0, 60^0$, dan 90^0.

Nilai perbandingan sudut istimewa dapat ditentukan menggunakan konsep lingkaran dengan panjang jari-jari 1 satuan. Lingkaran berpusat di O (0,0) dan berjari-jari 1 satuan sehingga mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 1$, yang menyatakan hubungan antara variabel x dengan variabel y.



Gambar 6.7

Susut α° adalah sudut yang dibentuk oleh OA terhadap sumbu x dan merupakan sudut lancip. Titik B adalah proyeksi titik A terhadap sumbu x sehingga OB = x dan AB = y. Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, diperoleh hubungan:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{x}{1} = x$

$\tan\alpha = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{y}{x}$

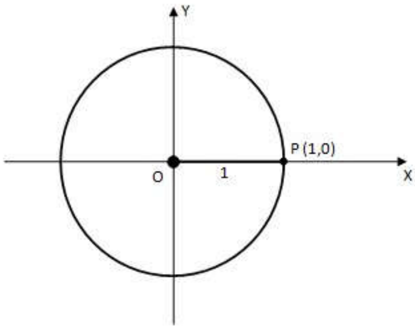
cosec $\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{y}$

$\sec \ \alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{x}$ $\cot \ \alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{x}{y}$

Dengan demikian, dalam lingkaran satuan tersebut, koordinat titik A (x,y) dapat dinyatakan sebagai A (cos α^0, sin α^0).

a. *Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut* 0^0

Jika sudut $\alpha^0 = 0^0$, maka kaki sudut OP berimpit dengan sumbu X positif atau titik P berada pada sumbu X positif.



Gambar 6.8

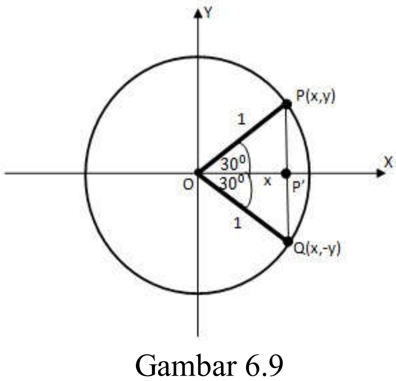
Koordinat titik P adalah (1,0) sehingga (1,0) = (cos 0^0, sin 0^0). Dengan demikian, diperoleh:

$Sin\ 0^0 = 0$

$Cos\ 0^0 = 1$

$\tan\ 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \dfrac{0}{1} = 0$

b. *Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut* 30^0



Gambar 6.9

Jika $\alpha^0 = 30^0$, maka $\angle$OPP' = 60^0. ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1. Karena ΔOPP' sama dan sebangun dengan ΔOQP', maka PP' = QP' = $\frac{1}{2}$ atau ordinat y = $\frac{1}{2}$. Segitiga OPP' siku-siku di P' dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = (OP)^2 - (PP')^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow$ OP' = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

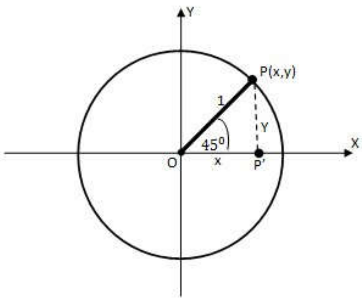
OP' menyatakan absis titik P atau $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Untuk $\alpha = 30^0$ maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ sehingga $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ = (cos 30^0, sin 30^0). Sehingga diperoleh:

Sin $30^0 = \frac{1}{2}$

cos $30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

tan $30^0 = \dfrac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

c. *Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut* 45^0



Gambar 6.10

Jika $\alpha^0 = 45^0$, maka PP' merupakan ΔPP' atau x = y. Perhatikan gambar disamping. Dengan menerapkan Teorema Phytagoras pada ΔPP' diperoleh:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Karena x = y maka y = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Sehingga untuk $\alpha^0 = 45^0$ maka koordinat titik P adalah ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)

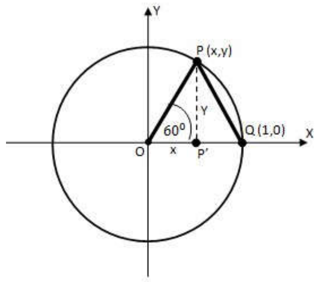
sehingga ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$) = (cos 45^0, sin 45^0) diperoleh:

Sin $45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Cos $45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Tan 45^0 = $\dfrac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

d. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 60^0



Gambar 6.11

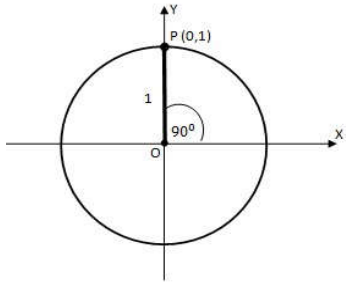
Jika sudut $\alpha^0 = 60^0$, maka ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan OP = OQ = PQ = 1. Karena ΔOPP' sama dan sebangun dengan ΔQPP', maka OP' = QP' = $\frac{1}{2}$ sehingga x = $\frac{1}{2}$. Dengan menerapkan Teorema Phytagoras pada ΔOPP' dapat ditunjukkan bahwa PP' = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, sehingga y = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. untuk sudut $\alpha^0 = 60^0$ maka koordinat titik P adalah ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) sehingga, ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) = (cos 60^0, sin 60^0) diperoleh:

Sin $60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Cos $60^0 = \frac{1}{2}$

Tan 60^0 = $\dfrac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

e. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 90^0



Gambar 6.12

Jika Jika sudut $\alpha^0 = 90^0$, maka kaki sudut OP berimpit dengan sumbu Y positif atau titik P berada pada sumbu Y positif seperti terlihat pada gambar disamping. Koordinat titik P adalah (0, 1) sehingga (0,1) = (cos 90^0, sin 90^0) diperoleh:

Sin 90^0 = 1 Cos $90^0 = 0$

Tan $90^0 = \dfrac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \dfrac{1}{0}$ (tidak terdefinisi)

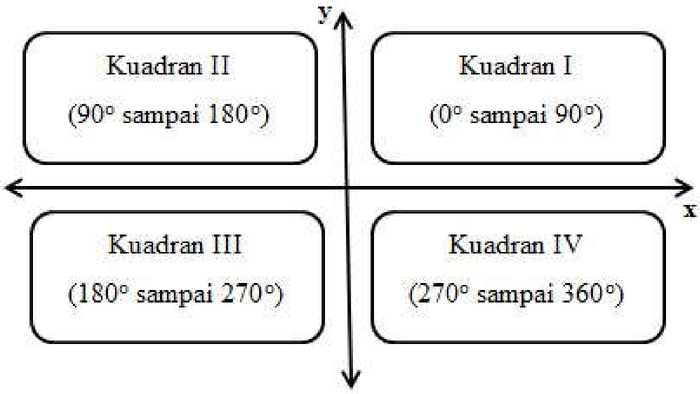
Berdasarkan nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa yang telah diperoleh diatas dapat di tuliskan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 6.1
Nilai-nilai Perbandingan Trigonometri
Untuk Sudut-sudut Istimewa

α	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0°	0	1	0	~	0	~
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
90°	1	0	~	0	~	0

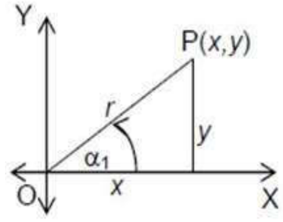
3. *Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut di Semua Kuadran*

Wilayah-wilayah atau kuadran beserta besar sudutnya apabila digambarkan akan tampak seperti berikut.



Gambar 6.13

a. *Tanda-tanda perbandingan trigonometri di kuadran I*



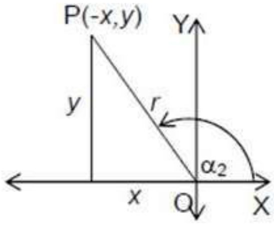
Gambar 6.14

Sin $\alpha_1{}^0 = \frac{y}{r}$ (positif) Cosec $\alpha_1{}^0 = \frac{r}{y}$ (positif)

Cos $\alpha_1{}^0 = \frac{x}{r}$ (positif) Sec $\alpha_1{}^0 = \frac{r}{x}$ (positif)

Tan $\alpha_1{}^0 = \frac{y}{x}$ (positif) Cot $\alpha_1{}^0 = \frac{x}{y}$ (positif)

b. Tanda-tanda perbandingan trigonometri di kuadran II



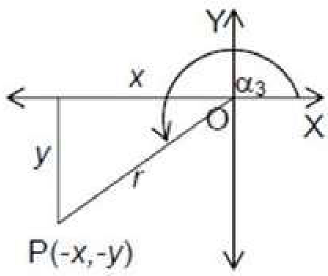
Gambar 6.15

Sin $\alpha_2{}^0 = \frac{y}{r}$ (positif) Cosec $\alpha_2{}^0 = \frac{r}{y}$ (negatif)

Cos $\alpha_2{}^0 = \frac{-x}{r}$ (negatif) Sec $\alpha_2{}^0 = \frac{r}{-x}$ (negatif)

Tan $\alpha_2{}^0 = \frac{y}{-x}$ (negatif) Cot $\alpha_2{}^0 = \frac{-x}{y}$ (negatif)

c. Tanda-tanda perbandingan trigonometri di kuadran III

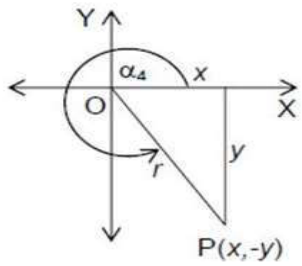


Gambar 6.16

Sin $\alpha_3{}^0 = \frac{-y}{r}$ (negatif) Cosec $\alpha_3{}^0 = \frac{r}{-y}$ (negatif)

Cos $\alpha_3{}^0 = \frac{-x}{r}$ (negatif) Sec $\alpha_3{}^0 = \frac{r}{-x}$ (negatif)

Tan $\alpha_3{}^0 = \frac{-y}{-x}$ (positif) Cot $\alpha_3{}^0 = \frac{-x}{-y}$ (positif) *d. Tanda-tanda perbandingan trigonometri di kuadran IV*



Gambar 6.17

Sin $\alpha_4{}^0 = \frac{-y}{r}$ (negatif)

Cos $\alpha_4{}^0 = \frac{x}{r}$ (positif)

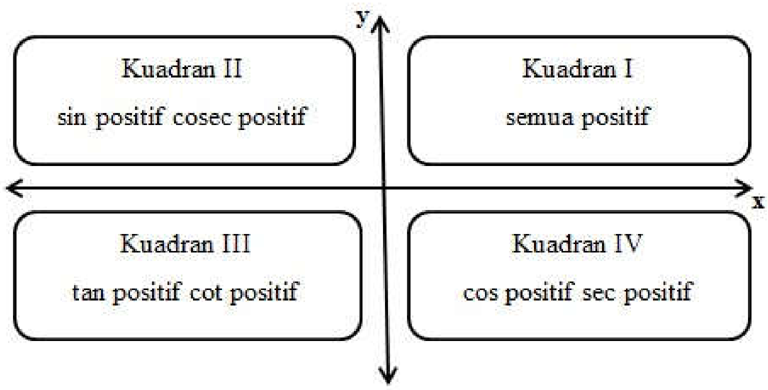
Tan $\alpha_4{}^0 = \frac{-y}{x}$ (negatif)

Cosec $\alpha_1{}^0 = \frac{r}{-y}$ (negatif)

Sec $\alpha_1{}^0 = \frac{r}{x}$ (positif)

Cot $\alpha_1{}^0 = \frac{x}{-y}$ (negatif)

Hasil-hasil di atas dapat disajikan dengan memakai bagan seperti berikut.



Cara lain untuk menyajikan tanda-tanda perbandingan trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran adalah dengan tabel seperti berikut

Tabel 6.2
Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut di Semua Kuadran

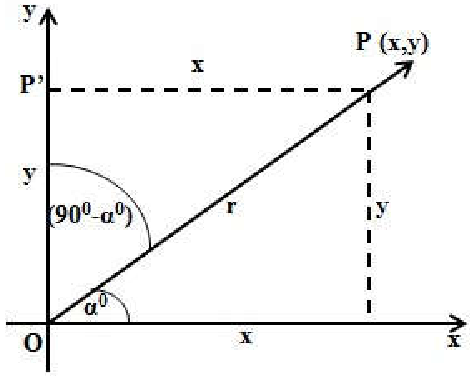
Perbandingan Trigonometri	Sudut-sudut di Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
cosec	+	+	-	-

4. Rumus Perbandingan Trigonometri untuk Sudut – sudut Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi atau berhubungan ditunjukkan dengan adanya hubungan antara sudut α dengan sudut (90° ± α), (180° ± α), (270° ± α), (360° ± α), atau -α.

Jika sudut α berelasi dengan sudut (90° – α) atau (π2 – α), maka kedua sudut dinamakan saling berpenyiku. Selanjutnya, jika sudut α berelasi dengan sudut (180° – α) atau (π – α), maka kedua sudut tersebut dinamakan saling berpelurus.

a. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(90^0 - \alpha^0)$



Gambar 6.18

Jika α^0 memenuhi $0° < \alpha^0 < 90°$ (sudut lancip) dan berada di kuadran I, maka:

Sin $\alpha^0 = \frac{y}{r}$	Cosec $\alpha^0 = \frac{r}{y}$
Cos $\alpha^0 = \frac{x}{r}$	Sec $\alpha^0 = \frac{r}{x}$
Tan $\alpha^0 = \frac{y}{x}$	Cot $\alpha^0 = \frac{x}{y}$

Perhatikan pula bahwa titik P dicerminkan terhadap sumbu y diperoleh P' sehingga segitiga POP' siku-siku di P' dan besar POP'=$(90^0 - \alpha^0)$.

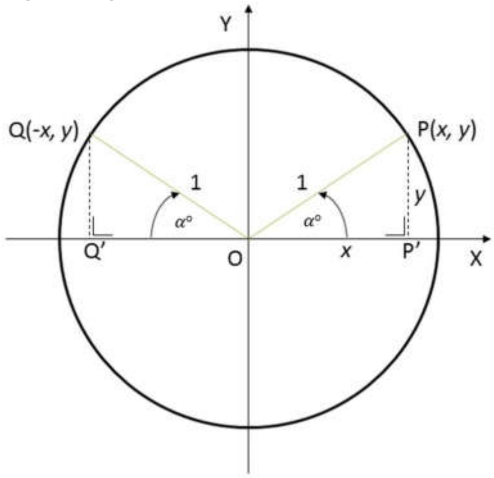
Sin $(90^0 - \alpha^0) = \frac{y}{r}$ = Cos α^0	Cosec $(90^0 - \alpha^0) = \frac{r}{y}$ = Sec α^0
Cos $(90^0 - \alpha^0) = \frac{x}{r}$ = Sin α^0	Sec $(90^0 - \alpha^0) = \frac{r}{x}$ = Cosec α^0
Tan $(90^0 - \alpha^0) = \frac{y}{x}$ = Cot α^0	Cot $(90^0 - \alpha^0) = \frac{x}{y}$ = Tan α^0

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(90^0 - \alpha^0)$ dan α^0 di atas dapat dirangkum sebagai berikut.

1) Sin $(90^0 - \alpha^0)$ = Cos α^0

2) Cos $(90^0 - \alpha^0)$ = Sin α^0
3) Tan $(90^0 - \alpha^0)$ = Cot α^0
4) Cosec $(90^0 - \alpha^0)$ = Sec α^0
5) Sec $(90^0 - \alpha^0)$ = Cosec α^0
6) Cot $(90^0 - \alpha^0)$ = Tan α^0

b. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(180^0 - \alpha^0)$

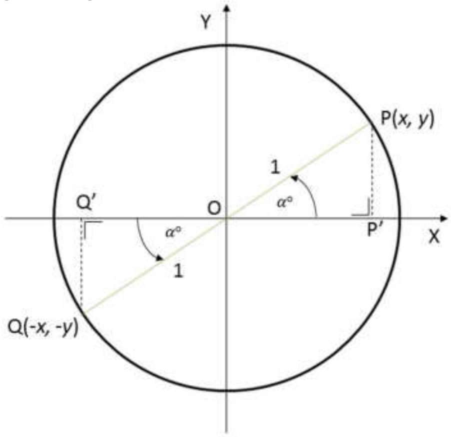


Gambar 6.19

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(180^0 - \alpha^0)$ dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.

1) sin $(180^o - \alpha^o)$ = sin α^o
2) cos $(180^o - \alpha^o) = -$ cos α^o
3) tan $(180^o - \alpha^o) = -$ tan α^o
4) cosec $(180^o - \alpha^o)$ = cosec α^o
5) sec $(180^o - \alpha^o) = -$ sec α^o
6) cot $(180^o - \alpha^o) = -$ cot α^o

c. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(180^0 + \alpha^0)$



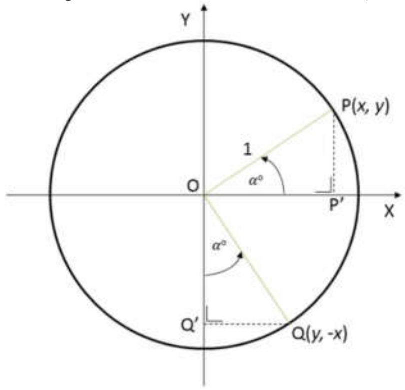
Gambar 6.20

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(180^0 + \alpha^0)$ dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.

1) sin $(180^o + \alpha^o) = -$ sin α^o
2) cos $(180^o + \alpha^o) = -$ cos α^o

3) tan (180° + α°) = tan α°
4) cosec (180° + α°) = − cosec α°
5) sec (180° + α°) = − sec α°
6) cot (180° + α°) = cot α°

d. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(270^0 + \alpha^0)$

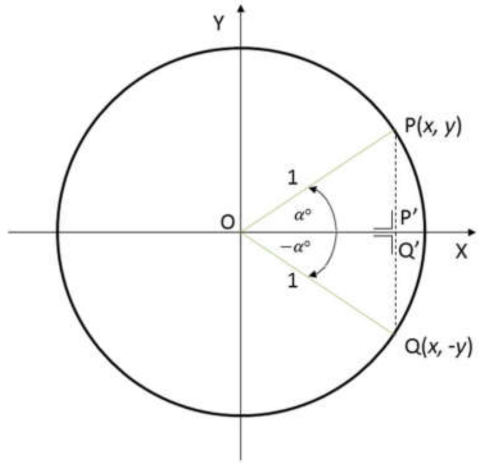


Gambar 6.21

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(270^0 + \alpha^0)$dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.

1) sin (270° + α°) = − cos α°
2) cos (270° + α°) = sin α°
3) tan (270° + α°) = − cot α°
4) cosec (270° + α°) = − sec α°
5) sec (270° + α°) = cosec α°
6) cot (270° + α°) = − tan α°

e. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut negatif $(-\alpha^0)$



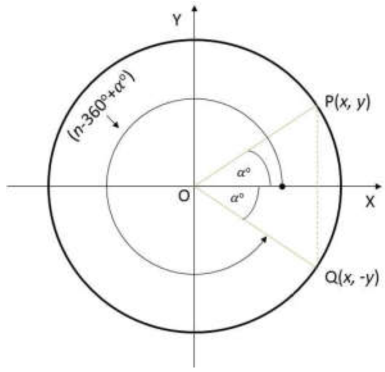
Gambar 6.22

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (- α^0) dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.

1) sin (−α°) = − sin α°
2) cos (−α°) = cos α°
3) tan (−α°) = − tan α°
4) cosec (−α°) = − cosec α°

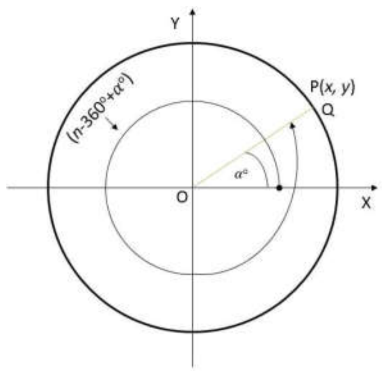
5) sec (−α°) = sec α°
6) cot (−α°) = − cot α°

f. Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(n.360^0 - \alpha^0)$ dan sudut $(n.360^0 + \alpha^0)$



Gambar 6.23

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(n.360^0 - \alpha^0)$ dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.
1) sin (n . 360° − α°) = − sin α°
2) cos (n . 360° − α°) = cos α°
3) tan (n . 360° − α°) = − tan α°
4) cosec (n . 360° − α°) = − cosec α°
5) sec (n . 360° − α°) = sec α°
6) cot (n . 360° − α°) = − cot α°



Gambar 6.24

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(n.360^0 + \alpha^0)$ dan α^0 dapat dirangkum sebagai berikut.
1) sin (n . 360° + α°) = sin α°
2) cos (n . 360° + α°) = cos α°
3) tan (n . 360° + α°) = tan α°
4) cosec (n . 360° + α°) = cosec α°
5) sec (n . 360° + α°) = sec α°
6) cot (n . 360° + α°) = cot α°

D. Identitas Trigonometri

1. Identitas trigonometri Dasar

   Identitas trigonometri dasar yang menghubungkan satu perbandingan trigonometri dengan trigonometri yang lain. Identitas trigonometri yang dimaksud adalah:

   a. Identitas trigonometri dasar, merupakan hubungan kebalikan

      1) $\sin \alpha^0 = \dfrac{1}{cosec\, \alpha^0}$ atau cosec $\alpha^0 = \dfrac{1}{sin\, \alpha^0}$

      2) $\cos \alpha^0 = \dfrac{1}{sec\, \alpha^0}$ atau $\sec \alpha^0 = \dfrac{1}{cos\, \alpha^0}$

      3) $\tan \alpha^0 = \dfrac{1}{cot\, \alpha^0}$ atau $\cot \alpha^0 = \dfrac{1}{tan\, \alpha^0}$

   b. Identitas trigonometri dasar merupakan hubungan perbandingan

      1) $\tan \alpha^0 = \dfrac{\sin \alpha^0}{cos\, \alpha^0}$

      2) $\cot \alpha^0 = \dfrac{\cos \alpha^0}{sin\, \alpha^0}$

   c. Identitas trigonometri dasar merupakan hubungan phytagoras

      1) $sin^2\, \alpha^0 + cos^2\, \alpha^0 = 1$

      2) $1 + tan^2\, \alpha^0 = sec^2\, \alpha^0$

      3) $1 + cot^2\, \alpha^0 = cosec^2\, \alpha^0$

2. Identitas trigonometri yang lain

   Identitas-identitas trigonometri dasar yang telah dibahas diatas digunakan untuk menyederhanakan bentuk-bentuk trigonometri.

E. Persamaan Trigonometri

1. Penyelesaian persamaan trigonometri dasar

   a. Penyelesaian persamaan $\sin x^0 = \sin \alpha^0$ $(x \in R)$

      Penyelesaian persamaan trigonometri $sin\, x^0 = sin\, \alpha^0$ $(x \in R)$ dapat ditentukan dengan menggunakan perbandingan trigonometri sudut berelasi berikut.

      Sin $(180^0 - \alpha^0) = \sin \alpha^0$

      Sin $(\alpha^0 + k \,.\, 360^0) = \sin \alpha^0$

      Maka persamaan trigonometrinya dapat ditetapkan sebagai berikut.

      Jika $sin\, x^0 = sin\, \alpha^0$ $(x \in R)$

      $x = \alpha + k\,.\,360^0\ atau\ x = (180 - \alpha) + k\,.\,360^0$, dengan $k \in B$

      $atau$

      Jika $sin\, x^0 = sin\, \alpha^0$ $(x \in R)$

$x = A + 2k\pi$ atau $x = (\pi - A) + 2k\pi$, dengan $k \in B$

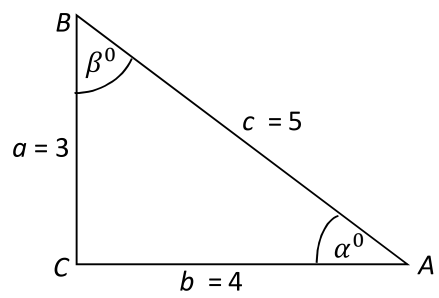
b. Penyelesaian persamaan $\cos x^0 = \cos \alpha^0$ $(x \in R)$
Penyelesaian persamaan trigonometri $cos\ x^0 = cos\ \alpha^0$ $(x \in R)$ dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan yang berlaku pada kosinus sudut-sudut berelasi berikut.
$\cos(-\alpha^0) = \cos \alpha^0$
$\cos(\alpha^0 + k\ .\ 360^0) = \cos \alpha^0$
Maka persamaan trigonometrinya dapat ditetapkan sebagai berikut.

Jika $cos\ x^0 = \cos \alpha^0$ $(x \in R)$
$x = \alpha + k\ .\ 360^0\ atau\ x = (-\alpha) + k\ .\ 360^0$, dengan $k \in B$
$atau$
Jika $cos\ x^0 = cos\ \alpha^0$ $(x \in R)$
$x = A + 2k\pi$ atau $x = (-A) + 2k\pi$, dengan $k \in B$

c. Penyelesaian persamaan $\tan x^0 = tan\ \alpha^0$ $(x \in R)$
Penyelesaian persamaan trigonometri $tan\ x^0 = tan\ \alpha^0$ $(x \in R)$ dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan yang berlaku pada tangen sudut berelasi
$\tan(180^0 + \alpha^0) = tan\ \alpha^0$
$\tan(\alpha^0 + k\ .\ 360^0) = \tan \alpha^0$
Maka persamaan trigonometrinya dapat ditetapkan sebagai berikut.
Jika $tan\ x^0 = tan\ \alpha^0$ $(x \in R)$, maka $x = \alpha + k\ .180$, dengan $k \in B$
$atau$
Jika $tan\ x^0 = tan\ A$ $(x \in R)$, maka $x = A + 2\pi$ dengan $k \in B$

Contoh Soal

1. Segitiga siku-siku ABC mempunyai panjang sisi-sisi a = 3, b = 4, dan c = 5 (perhatikan gambar disamping). Carilah nilai dari keenam perbandingan trigonometri untuk sudut α^0.



Penyelesaian:
Karena nilai-nilai *a,b,* dan *c* telah diketahui,
Maka nilai perbandingan trigonometri dapat dihitung secara langsung yaitu:

$\sin \alpha^0 = \frac{de}{mi} = \frac{3}{5}$; $\cot \alpha^0 = \frac{sa}{de} = \frac{4}{3}$

$\cos \alpha^0 = \frac{sa}{mi} = \frac{4}{5}$; $\sec \alpha^0 = \frac{mi}{sa} = \frac{5}{4}$

$\tan\alpha^0 = \frac{de}{sa} = \frac{3}{4}$; $\text{cosec}\,\alpha^0 = \frac{mi}{de} = \frac{5}{3}$

2. Hitung nilai dari:
   a. Sin 120^0
      Penyelesaian:
      Sin 120^0 $= \sin(180^0 - 60^0)$
      $= \sin 60^0$
      $= \frac{1}{2\sqrt{3}}$

   b. Cos 135^0
      Penyelesaian:
      Cos 135^0 $= \cos(180^0 - 45^0)$
      $= -\cos 45^0$
      $= -\frac{1}{2}$

   c. Tan 150^0
      Penyelesaian:
      Tan 150^0 $= \tan(180^0 - 30^0)$
      $= -\tan 30^0$
      $= -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

3. Jika diketahui tan A = $-\frac{5}{12}$ dan $90^0 < A < 180^0$, hitunglah Sec A.
   Penyelesaian:
   $1 + tan^2 A = \sec^2 A$
   $\Leftrightarrow \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$
   $\Leftrightarrow \sec^2 A = 1 + (-\frac{5}{12})^2$
   $\Leftrightarrow \sec^2 A = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$
   $\Leftrightarrow \sec A = -\frac{13}{12}$ atau $\sec A = \frac{13}{12}$

4. Sederhanakan bentuk trigonometri $(1 - \cos\alpha)\,(cosec\ \alpha + \cot\alpha)$
   Penyelesaian:
   $(1-\cos\alpha)(cosec\,\alpha + \cot\alpha) = (1-\cos\alpha)(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$
   $= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$
   $= \frac{1-cos^2\alpha}{\sin\alpha}$
   $= \frac{sin^2\alpha}{\sin\alpha}$
   $= \sin\alpha$

Jadi, bentuk sederhana dari $(1 - \cos\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha) = \sin\alpha$

5. Buktikan bahwa $\sec A = \tan A + \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned}
   \text{Tan A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} \\
   &= \frac{\sin A\,(1+\sin A) + \cos A \cos A}{\cos A\,(1+\sin A)} \\
   &= \frac{1+\sin A}{\cos A\,(1+\sin A)} \\
   &= \frac{1}{\cos A} \\
   &= \sec A
   \end{aligned}$$

   Ruas kanan = ruas kiri

   Jadi, terbukti bahwa $\sec A = \tan A + \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

F. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

Beberapa kesulitan yang sering dialami siswa dalam pembelajaran materi trigonometri antara lain:

1. Siswa sering kesulitan tertukar untuk menentukan nilai sudut trigonometri.
2. Siswa kesulitan saat menentukan nilai sudut yang lebih dari 90^0.
3. Siswa kesulitan mengetahui positif negatif dalam kuadran.

Alternatif Pembelajaran yang dapat dilakukan antara lain:

1. Sebaiknya dalam menjelaskan guru tidak hanya memberikan rumus begitu saja, tetapi juga menjelaskan cara menemukannya sehingga siswa benar-benar memahami konsepnya tidak hanya menghafal rumus.
2. Sebaiknya pendidik tidak hanya menjelaskan nilai sudut hanya sampai di sudut 90^0. Tetapi pendidik juga harus menjelaskan langkah-langkah untuk menentukan nilai sudut yang lebih dari 90^0. Seperti dengan menggunakan media pembelajaran sehingga siswa juga dapat mengingat langkah-langkah tidak hanya melihat tabel yang sudah ada.
3. Sebaiknya dalam menjelaskan guru tidak hanya memberikan rumus begitu saja, tetapi juga menjelaskan cara menemukannya sehingga siswa benar-benar memahami konsepnya tidak hanya menghafal saja.

Soal Latihan

1. Diketahui $\sin\alpha^0 = \frac{2}{3}$ dan α^0 sudut lancip $(0^0 < \alpha^0 < 90^0)$.
   Carilah nilai perbandingan trigonometri sudut α^0 yang lain.
2. Buktikan bahwa $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} - \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{2sin^2\beta - 1}{\sin\beta\cos\beta}$

3. Diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dan $0^0 < \alpha^0 < 90^0$. Hitunglah:
   a. $\cos \alpha$ b. $\tan \alpha$
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\tan x = \sin x$, pada interval $[0, 2\pi]$.

BAB VII
DIMENSI TIGA

A. Pendahuluan

1. Pengertian Geometri

Geometri (*Greek; geo*= bumi, *metria*= ukuran) adalah bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang ukuran, bentuk, dan kedudukan serta sifat ruang. Geometri merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika tertua. Ilmu Geometri secara harfiah berarti pengukuran tentang bumi, yakni ilmu yang mempelajari hubungan di dalam ruang. Sejatinya, ilmu geometri sudah dipelajari peradaban Mesir Kuno, masyarakat Lembah Sungai Indus dan Babilonia. Peradaban-peradaban kuno ini diketahui memiliki keahlian dalam drainase rawa, irigasi, pengendalian banjir dan pendirian bangunan-bagunan besar. Kebanyakan geometri Mesir kuno dan Babilonia terbatas hanya pada perhitungan panjang segmen-segmen garis, luas, dan volume.

2. Sejarah Singkat Geometri

Terdapat paling sedikit enam wilayah yang dipandang sebagai 'sumber' penyumbang pengetahuan geometri, yaitu:

1. Babilonia **(4000 SM - 500 SM)**
2. Yunani **(600 SM – 400 SM)**
3. Mesir **(5000 SM - 500 SM)**
4. Jasirah Arab **(600 - 1500 AD)**
5. India **(1500 BC - 200 BC)**
6. Cina **(100 SM - 1400)**

Bangsa Babilonia menempati daerah subur yang membentang antara sungai Eufrat dan sungai Tigris di wilayah Timur Tengah. Banyak gedung dibangun seperti kota, sistem irigasi dan sawah pertanian yang telah berkembang. Geometri dipikirkan oleh para insinyur untuk keperluan pembangunan kala itu.

Geometri yang lahir dan berkembang di Babilonia merupakan sebuah hasil dari keinginan dan harapan para pemimpin pemerintahan dan agama pada masa itu. Teknik-teknik geometri yang berkembang saat itu pada umumnya masih kasar dan bersifat intuitif. Akan tetapi, cukup akurat dan dapat memenuhi kebutuhan perhitungan berbagai fakta tentang teknik-teknik geometri saat itu yang termuat dalam Ahmes Papirus. Peninggalan berupa tulisan ini merupakan bagian dari barang-barang yang tersimpan di museum-museum di London dan New York. Dalam Papirus ini terdapat formula tentang perhitungan luas daerah suatu persegi panjang, segitiga siku-siku, trapesium yang mempunyai kaki tegak lurus dengan alasnya, serta formula tentang pendekatan perhitungan luas daerah lingkaran.

Selain melanjutkan mengembangkan geometri, mereka juga mengembangkan sistem bilangan yang kini kita kenal dengan '*sexagesimal*' berbasis 60. Kita masih menikmati (dan menggunakan) sistem ini ketika berbicara tentang waktu.

Bangsa Babilonia mengembangkan cara mengitung luas dan volume. Di antaranya menghitung panjang keliling lingkaran yang sama dengan tiga kali panjang garis tengahnya. Kita mengenal harga tiga ini mendekati harga π . Rumus Pythagoras juga sudah dikenal pada masa itu.

Bangsa Mesir mendiami wilayah yang sangat subur di sepanjang sungai Nil. Pertanian berkembang pesat. Pemerintah memerlukan cara untuk membagi petak-petak sawah dengan adil. Maka, geometri digunakan untuk menyajikan berbagai bentuk polygon yang di sesuaikan dengan keadaan walayah di sepanjang sungai Nil.

Di Yunani, geometri mengalami masa 'emas'nya. Ditemukannya teori yang kita kenal dewasa ini dengan nama teori aksiomatis. Teori berpikir yang mendasarkan pada sesuatu yang paling dasar yang kebenarannya kita terima begitu saja. Kebenaran semacam ini kita sebut kebenaran aksioma. Dari sebuah aksioma diturunkan berbagai dalil baik dalil dasar maupun dalil turunan. Dari era ini, kita juga memperoleh warisan buku geometri yang hingga kini belum terbantahkan, yaitu geometri Euclides.

Di awal perkembangan, Islam menyebar di Timur Tengah, Afrika Utara, Spanyol, Portugal, dan Persia. Para matematikawan Islam menyumbang pada pengembangan aljabar, asronomi, dan trigonometri. Trigonometri merupakan salah satu pendekatan untuk menyelesaian masalah geometri secara aljabar. Kita mengenalnya menjadi geometri analitik. Mereka juga mengembangkan polinomial.

Di wilayah timur, India dan Cina dikenal penyumbang pengetahuan matematika yang handal. Di India, para matematikawan memiliki tugas membuat berbagai bangunan pembakaran untuk korban di altar. Salah satu syaratnya adalah bentuk boleh (bahkan harus) berbeda tetapi luasnya harus sama. Di sinilah berkembang teori-teori geometri.

Seperti cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, matematika (termasuk geometri) juga dikembangkan oleh para ilmuwan Cina sejak 2000 tahun sebelum Masehi. Jika di Eropa terdapat buku 'Unsur-unsur', geometri Euclides yang mampu menembus waktu 2000 tahun tanpa tertandingi, di Cina terdapat buku *'Sembilan bab tentang matematika'* yang dibuat sekitar tahun 179 oleh Liu Hui. Buku ini memuat banyak masalah geometri. Di antaranya menghitung luas dan volume. Dalam buku itu juga mengupas hukum Pythagoras. Juga banyak dibicarakan tentang polygon.

Pada zaman pertengan, ahli matematik Muslim banyak menyumbangkan mengenai perkembangan geometri. Al- Mahani (1.853) mendapat ide untuk menguraikan masalah geometri seperti menyalin kubus dalam bentuk aljabar. Thabit Ibnu Qurra (836 – 901) dengan pengendalian arimetikal yang diberikan kepada ratio kuantitas geometri, dan menyumbangkan tentang pengembangan geomeri analitik. Omar Khayyam (1048 -1131) menemukan penyelasaian geometri dalam persamaan kubik dan penyelidikan selanjutnya yang terbesar adalah pengembangan geometri bukan Euclid.

Pada awal abad ke-17, terdapat dua perkembangan penting dalam geometri. Pertama, penciptaan geometri analik atau geometri dengan koordinat dan persamaan, oleh Rene Descartes (1596-1650) dan Pierre de Fermat (1601-1665). Ini adalah awal di perlukannya untuk perkembangan kalkulus. Kedua, penyelidikan secara sistematik dari geometri proyektif oleh Girard Desargues (1591-1661). Geometri proyektif adalah penyelidikan geometri tanpa ukuran,hanya menyelidiki bagaimana hubungan antara satu sama lain.

Dua perkembangan dalam geometri pada abad ke-19 mengubah cara yang telah dipelajari sebelumnya. Ini merupakan penemuan Geometri bukan Euclid oleh Lobachevsky, Bolyai dan Gauss dan dari formulasi simetri sebagai pertimbangan utama dalam Program Erlangen dari Felix Klein (yang menyimpulkan geometri Euclid dan bukan Euclid). Dua dari ahli geometri pada masa itu ialah Bernhard Riemann, bekerja secara analisis matematika, dan Henri Poincaré, sebagai pengagas topologi algebraik dan teori geometrik dari sistem dinamikal.

B. Titik, Garis, dan Bidang

1. Unsur-Unsur Ruang

Semua benda yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dapat kita golongkan dalam benda-benda dimensi tiga. Kenapa disebut dimensi tiga? Karena benda tersebut memiliki panjang, lebar, dan tinggi. Kita tidak dapat menggambarkan sebuah bidang, yang sering kita lakukan adalah wakil bidang α atau bdang β. Garis yang kita gambar bukanlah garis tetapi wakil garis yang selalu dinotasikan garis h atau g, atau yang lainnya, garis sendiri adalah : tidak memiliki ujung, tidak dapat dihitung panjangnya. Prinsip yang berkaitan dengan garis adalah "melalui dua buah titik yang tidak berhimpit dapat dibuat tepat sebuah garis", oleh karena itu sering mrnyebutkan garis AB atau yang lain.

Contoh " pada suatu garis diletakkan dua buah titik misalnya titik A dan B maka garis tersebut menjadi tiga bagia, yaitu: sinar garis yang berpangkal di A, sinar garis yang berpangkal di B dan ruas garis AB. Sinar garis adalah mempunyai pangkal, tetapi tidak berujung, dan tidak dapat dihiitung panjangnya, sedangkan ruas garis adalah mempunyai dua ujung dan dapat dihitung panjangnya.

Titik adalah unsur ruang yang tidak memiliki bentuk dan tidak memiliki ukuran, yang sering kita tuliskan adalah wakil titik yang dinotasikan dengan noktah disertai huruf kapital.

2. Tempat Kedudukan

a. Tempat kedudukan titik dengan garis. Contohnya : pada kubus ABCD.EFGH, AB adalah salah satu rusuk kubus. Titik H, G, E di luar rusuk kubus AB, dan titik A dan B terletak di rusuk AB.

b. Tempat kedudukan titik dengan bidang. Contohmya pada kubus ABCD.EFGH diketahui ABCD adalah salah satu sisi kubus. Titik H, G , dan E di luar bidang ABCD, titik B , C, dan D terletak di bidang ABCD

c. Tempat kedudukan garis dengan garis

1) Dua garis berpotongan
Dua garis g dan garis h dikatakan berpotongan jika:

- Kedua garis tersebut terletak pada sebuah bidang
- Kedua garis tersebut memiliki sebuah titik persekutuan.
- Titik persekutuan disebut juga titik potong.

Contoh: persimpangan jalan yang bertemu di satu titik

2) Dua garis sejajar
Dua garis g dan garis h dikatakan sejajar jika:
- Kedua garis tersebut terletak pada sebuah bidang
- Kedua garis tersebut tidak memiliki sebuah titik persekutuan

Contoh: rel kereta api

3) Dua garis bersilangan
Dua garis g dan garis h dikatakan bersilangan jika:
- Kedua garis tersebut tidak terletak pada sebuah bidang
- Kedua garis tersebut tidak memiliki sebuah titik persekutuan

Contoh: Pada kubus ABED.EFGH. Garis EG berpotongan dengan HF, DH sejajr dengan CG dan AB bersilangan dengan FG

d. Tempat kedudukan garis dengan bidang

1) Garis terletak pada bidang
Garis terletak pada bidang jika antara garis dan bidang terdapat sekurang-kurangnya dua titik persekutuan. Contoh : garis H terletak pada bidang V yang dapat dikatakan bidang V melalui garis H

2) Garis berpotongan dengan bidang
garis memotong bidang jika antara garis dan bidang terdapat satu titik persekutuan. Titik persekutuan disebut titik potong atau titik tembus.

3) Garis sejajar bidang
Garis sejajar bidang jika antara garis dan bidang tidak mempunyai titik persekutuan.

e. Tempat kedudukan bidang dengan bidang

1) Bidang berpotongan bidang
Dua bidang berpotongan jika terdapat garis pesekutuan antara dua bidang. Garis persekutuan disebut juga garis potong.

Contoh: jika bidang U berpotongan dengan bidang V maka garis potong antara bidang ditulis (U,V)

2) Dua bidang sejajar
Dua bidang dikatakan sejajar apabila antara kedua bidang tersebut tidak memiliki garis persekutuan.

Contoh: pada kubus ABCD.EFGH, bidang ABCD berpotongan dngan bidang CDHG di garis CD, bidang BCGF sejajar dengan bidang ADHE

3. Proyeksi Titik dan Garis pada Bidang

Garis G tegak lurus bidang V jika dan hanya jika garis G tegak lurus dengan semua garis yang terdapat pada bidang V.

Tegak lurus bidang memiliki sifat-sifat:

a. Garis G tegak lurus bidang V jika dan hanya jika garis G tegak lurus dengan dua garis berpotongan yang terletak di bidang V
b. Garis G tegak lurus bidang V jika dan hamya jika garis G tegak lurus bidang V tegak lurus dengan dua garis sejajar tang terletak pada bidang V
c. Garis G tegak lurus bidang V jika dan hanya jika garis G tegak lurus dengan sebuah garis yang terletak pad bidang V dan garis tersebut tidak melalui titik tebus garis G dengan bidang V

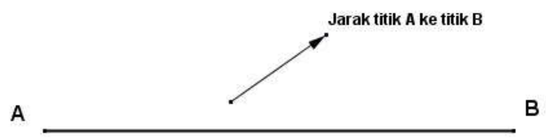
Contoh: jika dari titik T ditarik garis TT' (T' pada bidang V) sedemmikian sehingga TT' tegak lurus dengan bidang V, maka T' disebut proyeksi titik T pada bidang V.

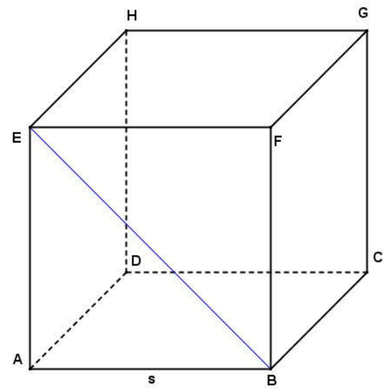
C. Jarak

Jarak dua buah bangun adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan kedua buah bangun tersebut. Jarak adalah dua buah ruas garis terpendek yang menghubungkan dua buah bangun. Karena jarak didefinisikan sebagai ruas garis, tentunya jarak berupa lintasan yang lurus, tidak berkelok-kelok.

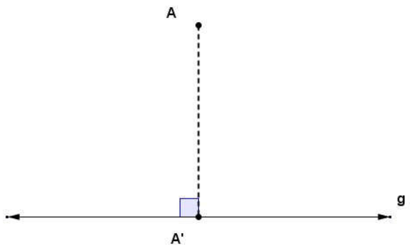
1. *Kedudukan titik*
   a. Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
   b. Jika suatu titik tidak dilalui garis, maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
   c. Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
   d. Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

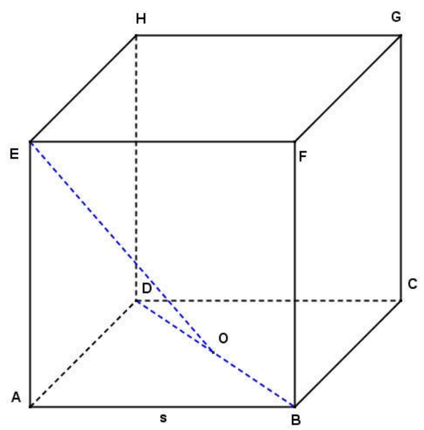
2. *Jarak antara titik dan titik*
   Jaraj titik A dengan titik b adalah panjang ruas garis AB.



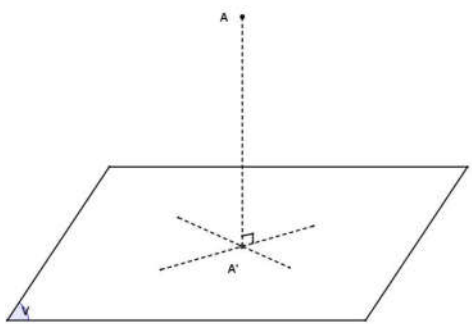


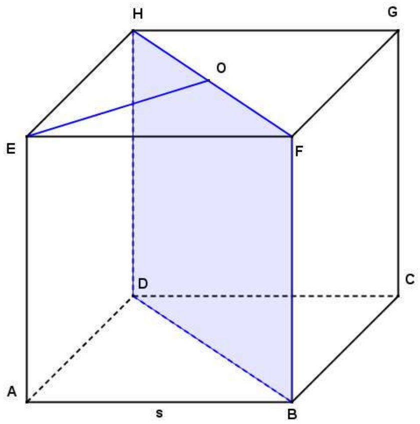
3. *Jarak titik ke garis*
   Jarak titik A dengan bidang V (titik diluar bidang V) adalah panjang ruas garis AA’ dengan A’ proyeksi titik A pada bidang V.



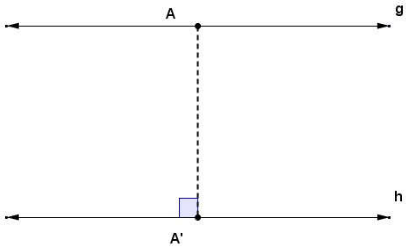


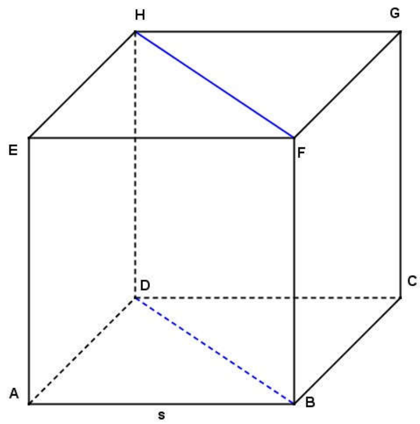
4. *Jarak titik ke bidang*
   Metode menghitung jarak antara satu titik ke suatu bidang harus membentuk lintasan garis lurus yang tegak lurus terhadap bidang.



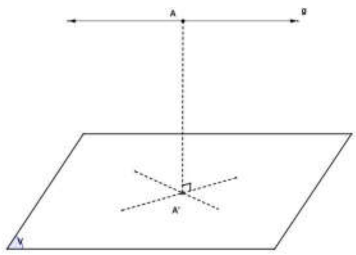


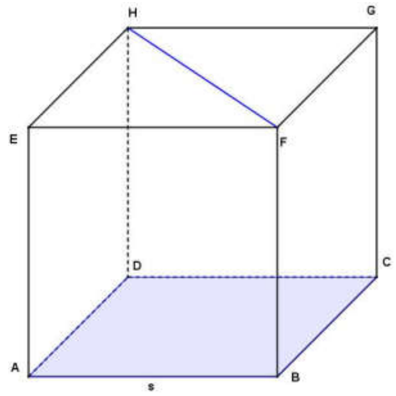
5. *Jarak dua garis sejajar*
   Jarak garis g dengan garis h (garis g sejajar garis h) adalah panjang ruas garis AA' dengan A adalah sebarang titik garis g dan titik A' adalah proyeksi titik A pada garis h.



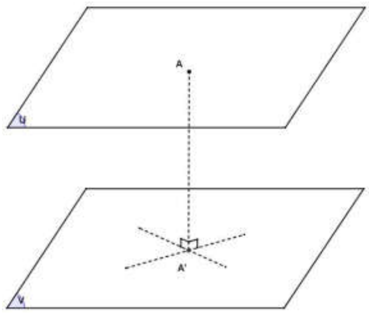


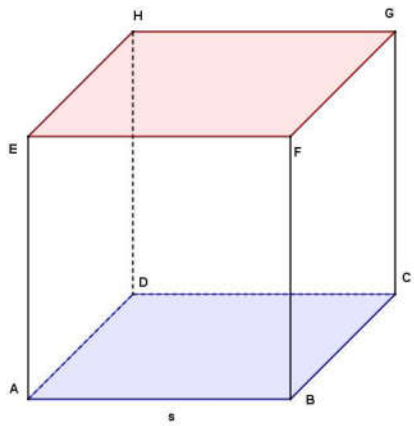
6. *Jarak garis dan bidang yang sejajar*
   Jarak garis g dengan bidang V (garis g sejajar dengan bidang V) adalah panjang ruas garis AA' dengan A adalah sebarang titik pada garis g dan titik A' adalah proyeksi titik A pada bidang V.





7. Jarak bidang dan bidang yang sejajar
   Jarak pada bidang U dengan bidang V (bidang U sejajar bidang V) adalah panjang ruas garis AA’ dengan a adalah sebarang titik pada bidang U dan titik A‘ adalah proyeksi titik A pada bidang V.

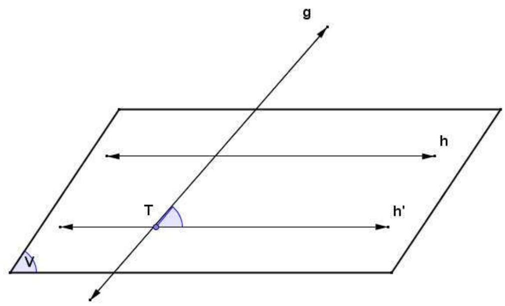


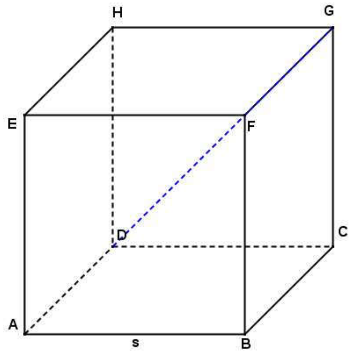


D. Sudut

1. Sudut antara dua garis dalam ruang

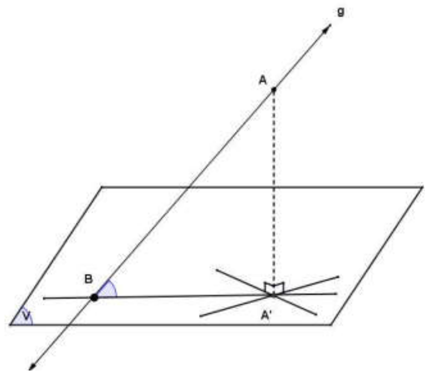
Sudut antara dua garis bersilangan g dan h adalah sudut lancip yang diperoleh jika dari sebarang titik T ditarik garis g1 yang sejajar g dan h1 yang sejajar h.

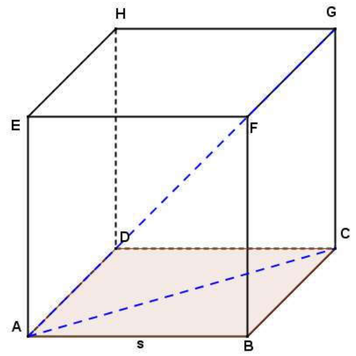




2. *Sudut antara garis dan bidang pada bangun ruang*

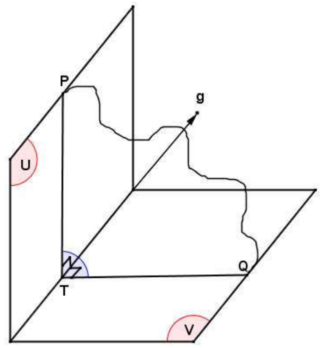
Jika garis g tidak tegak lurus dengan bidang V maka sudut garis g dengan bidang V alah sudut lancip yang dibentuk oleh garis g dengan proyeksi garis g pada bidang V.

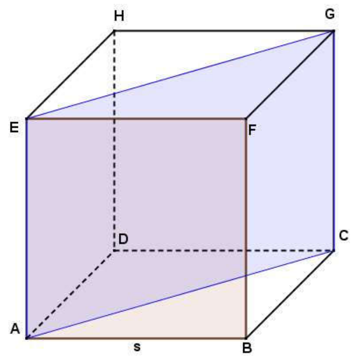




3. Sudut antara dua bidang pada bangun ruang

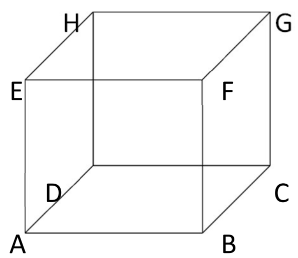
Sudut antara dua bidang yang berpotongan adalah sudut yang terbentuk oleh dua garis pada tiap-tiap bidang, dalam hal ini garis tersebut tegak lurus pada garis potong kedua bidang tersebut di satu titik.





Contoh:

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH.
   Tentukan :
   a) Titik yang berada pada garis DF
   b) Titik yang berada diluar bidang BCHE
   c) Garis yang sejajar dengan CF
   d) Garis yang berpotongan dengan BE
   e) Garis yang bersilangan dengan FG
   f) Bidang yang sejajar dengan bidang BDG

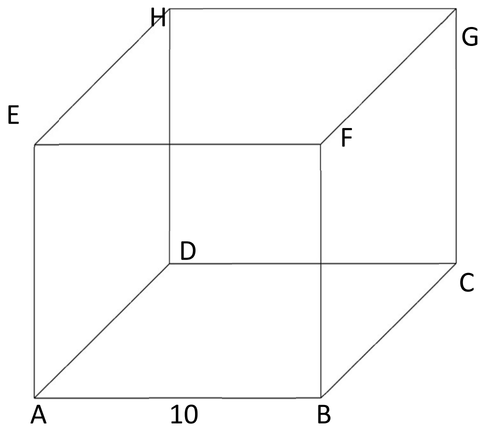


Jawab :

g) Titik D dan F
h) Titik A, D, F, G
i) DE
j) EA, EF, ED, EH
k) AB, DC, AE, DH
l) AFH

2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Hitunglah jarak antara :

a) Titik A ke H
b) Titik A ke garis CE
c) Titik A ke bidang BCGF
d) Titik A ke bidang BDE
e) Garis AE ke garis CG
f) Garis AE ke garis CG
g) Bidang ABCD ke EFGH



Jawab

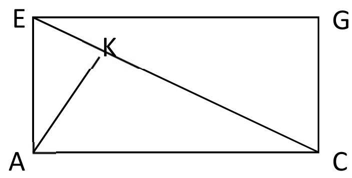
a) Jarak titik A ke H = AH

AH = $\sqrt{AD^2 + DH^2}$

= $\sqrt{100+100}$

= $\sqrt{200}$

=$10\sqrt{2}$ cm



b) Jarak A ke CE = AK

Pada segitiga siku-siku CAE

L△CAE = ½.AC.AE = ½.CE.AK

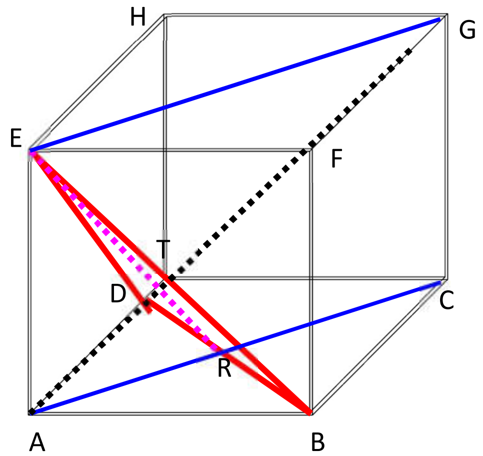
$$\frac{1}{2}.10\sqrt{2}.10 = \sqrt{2}.10\sqrt{3}.AK$$

$$AK = \frac{\frac{1}{2}.10\sqrt{2}.10}{\frac{1}{2}.10\sqrt{3}}$$

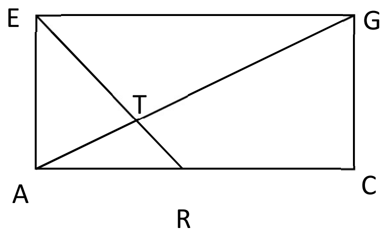
$$AK = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AK = \frac{10}{3}\sqrt{6}$$

c) Jarak titik A ke bidang BDE



Perhatikan persegi panjang ACGE sbb :



Garis AG berpotongan tegak lurus dengan Garis ER dititik T, sehingga jarak A ke Bidang BDE adalah AT.

$$\text{ER} = \sqrt{AR^2 + AE^2}$$
$$= \sqrt{50 + 100}$$
$$= \sqrt{150}$$
$$= 5\sqrt{6} \text{ cm.}$$

L. $\triangle$ARE = ½. AR. AE = ½. RE. AT

$$\tfrac{1}{2}.\ 5\sqrt{2}.10 = \tfrac{1}{2}.5\sqrt{6}.AT$$
$$50\sqrt{2} = 5\sqrt{6}.AT$$
$$\text{AT} = \frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}$$
$$\text{AT} = \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ cm}$$

E. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

Kesulitan yang sering dihadapi siswa dalam pembelajaran materi Dimensi Tiga antara lain:

1. Siswa mengalami kesulitan dalam pembuktian formal.
2. Siswa mengalami kesulitan dalam penguasaan konsep.
3. Sebagian siswa hanya mengandalkan hafalan tanpa memahami materi.

4. Belum dikuasainya materi prasyarat diantaranya adalah garis lurus, sudut, luas bangun datar, trigonometri, teorema Phytagoras.
5. Miskonsepsi antar materi.

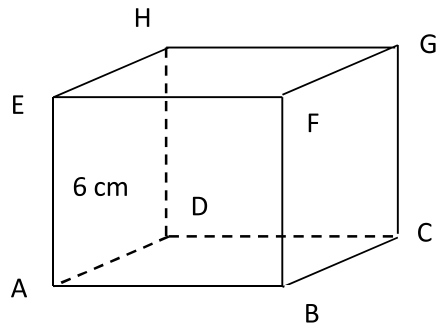
Beberapa alternatif pembelajaran yang dapat dilakukan untuk memcahkan masalah yang sering dialami siswa antara lain:

1. Pembelajaran dengan menggunakan bantuan media pembelajaran.
2. Pemanfaatan media sebagai sumber belajar bermakna.
3. Menekankan pemahaman konsep dibandingkan hafalan.
4. Sekilas di ingatkan kembali tentang materi prasyarat.
5. Menunjukkan persepsi tentang posisi berbagai objek dalam ruang dan menunjukkan perbedaan suatu objek satu dengan objek yang lain.

Latihan Soal

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH denan panjang rusuk 6 cm. Hitunglah jarak antara :
   a. Titik H ke garis AC
   b. Titik B ke garis AG
2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 4 cm. Jika P titik tengah EH, maka jarak titik P ke garis CF adalah…
3. Diketahui T.ABCD limas beraturan. Panjang rusuk alas 12 cm, dan panjang rusuk tegak $12\sqrt{2}$ cm. Jarak antara A ke TC adalah ….
4. Diketahui balik PQRS.TUVW dengan PQ = 4 cm, QR = 3 cm, PT = 6 cmHitung jarak antara :
   a. V ke RSTU
   b. Q ke PRVT
5. Pada kubus ABCD.EFGH, panjang rusuk 8 cm. Jarak titik E ke bidang BDG adalah...
6. Kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Titik I terletak di tengah-tengah rusuk BC. Tentukan jarak titik I ke bidang AFGD
7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm.
   Panjang proyeksi DE pada BDHF adalah

8. Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH. Jarak titik C dan bidang AFH= ….



9. Diketahui limas segi empat beraturan T.ABCD. Panjang rusuk tegak $\sqrt{11}\ cm$ dan panjang rusuk alas $2\sqrt{2}\ cm$. Sudut antara bidang TAD dan TBCadalah $\propto$, maka cos $\propto$ = ….

10. Prisma segi-4 beraturan ABCD.EFGH dengan rusuk 6 cm dan tinggi prisma 8 cm. titik potong diagonal AC dan BD adalah T, jarak titik D dan TH sama dengan ….

BAB VIII
STATISTIKA

A. Pendahuluan

Statistika adalah suatu metode yang digunakan dalam pengumpulan dan analisis data dapat diperoleh informasi yang bermamfaat. Statistika menyedikan prinsip dan metodoloi untuk merancang proses pengumpulan data , meringkas dan menyajikan data yang telah diperoleh , menganalisis dan pengambilan keputusan secara ringkas. Secara ringkas pengertian statistika adalah pengetahuan yang berkaitan dengan pengumpulan angka-angka , pengolahan , dan penganalisisan , penarikan kesimpulan , serta pembuatan keputusan berdasarkan data dan fakta yang sudah dianalisis.

Ilmu ini seusia dengan umur peradaban ini, di mana tradisi menghitung merupakan landasan utama dalam membangun peradaban. Semenjak peradaban Yunani ilmu hitung sudah diperkenalkan, dan menjadi alat utama dalam proses pengambilan keputusan. Fenomena ini bisa dilacak dalam tulisan filsof Yunani seperti Aristoteles, maupun Plato yang mengusulkan sistem pemilihan langsung terhadap pejabat publik di mana di kemudian hari dikenal dengan demokrasi langsung. Untuk menghitung siapa yang paling diterima oleh masyarakat dalam pemilihan tersebut maka aspek ilmu hitung menjadi dasar alat pembenar.

Penggunaan Statistika sudah dikenal sebelum abad 18, pada saat itu negara-negara Babilon, Mesir dan Roma mengeluarkan catatan tentang nama, usia, jenis kelamin, pekerjaan dan jumlah anggota keluarga. Kemudian pada tahun 1500, pemerintahan Inggris mengeluarkan catatan mingguan tentang kematian dan tahun 1662, dikembangkan catatan tentang kelahiran dan kematian. Baru pada tahun 1772 – 1791, G. Achenwall menggunakan istilah statistika sebagai kumpulan data tentang negara. Tahun 1791 – 1799, Dr .E.A.W Zimmesman mengenalkan kata statistika dalam bukunya Statistical Account of Scotland. Tahun 1981 – 1935 R. Fisher mengenalkan analisavarians dalam literatur statistiknya. Ilmu hitung kemudian berkembang pesat lagi pada masa imperium Romawi. Angka angka yang disimbolkan dalam peradaban Yunani dikembangkan dengan symbol Romawi. Meski angka Romawi tidak praktis, dalam batas tertentu memberikan pengaruh yang luas bagi perkembangan ilmu hitung. Angka Romawi mampu memberikan lambing terhadap angka dalam jumlah yang lebih banyak dibandingkan dengan angka Yunani.

Puncak peradaban ilmu hitung menjadi semakin cepat manakala tradisi Arab mengenalkan simbol angka yang sederhana dan fleksibel. Angka Arab mampu menyederhanakan simbol menjadi simbol yang mudah dimengerti dan dapat digunakan secara berulang secara mudah. Misal, untuk mengungkapkan angka 100, maka cukup hanya menggunakan 2 simbol saja yang sudah dipakai sebelumnya, demikian pula kalau harus menyebut angka 1 trilyun, angka yang dipakai tetap 1 dan 0, tinggal memperbanyak 0-nya saja. Sangat berbeda dengan angka Romawi, setiap perubahan persepuluhan harus dikenalkan simbol baru, yang kemudian tidak dijadikan basis pembuatan angka secara konsisten.

Puncak peradaban ilmu hitung mengalami perkembangan yang sangat pesat, tatkala tradisi Arab memperkenalkan simbol baru angka 0. Angka ini seakan telah menjadi angka mu'jizat dalam sejarah peradaban ilmu hitung, sebab dengan ditemukannya angka 0, maka akan mempersingkat penulisan-penulisan yang berbasis ribuan sampai tak terhingga. Bayangkan bagaimana menulis simbol satu trilyun jika menggunakan symbol Romawi. Inilah salah satu sumbangan tradisi Islam dan Arab yang sering dilupakan oleh orang. Ilmu Statistik sebagai bentuk aplikasi dan terapkan ilmu hitung sebagai ilmu murni juga mengalami perkembangan seiring dengan semakin berkembang ilmu hitung. Statistik yang lebih menekankan pada tradisi mencatat dan menyusun, memungkinkan ilmu ini mulai dilirik orang dalam konteks untuk mempergunakan hasil pencatatan dan penyusunan untuk mendapatkan pola. Pola ini menjadi sangat penting untuk dilihat, manakala manusia dihadapkan pada pergerakan peradaban manusia yang semakin kompleks, yang juga berarti jumlah data juga sangat kompleks, hampir setiap detik terdapat peristiwa yang lahir, dan harus didokumentasi.

Semakin tersebarnya data, menjadikan banyak pihak perlu mendapatkan data yang sahih, namun mudah dimengerti dan memiliki akurasi yang baik dalam dokumentasinya. Statistik merupakan satu-satunya ilmu yang bisa menawarkan pada tradisi mencatat ini. Penggunaan istilah statistika berakar dari istilah istilah dalam bahasa latin modern statisticum collegium ("dewan negara") dan bahasa Italia statista ("negarawan" atau "politikus"). Gottfried Achenwall (1749) menggunakan Statistik dalam bahasa Jerman untuk pertama kalinya sebagai nama bagi kegiatan analisis data kenegaraan, dengan mengartikannya sebagai "ilmu tentang negara (state)".

Pada awal abad ke-19 telah terjadi pergeseran arti menjadi "ilmu mengenai pengumpulan dan klasifikasi data". Sir John Sinclair memperkenalkan nama (Statistics) dan pengertian ini ke dalam bahasa Inggris. Jadi, statistika secara prinsip mula-mula hanya mengurus data yang dipakai lembaga-lembaga administratif dan pemerintahan. Pengumpulan data terus berlanjut, khususnya melalui sensus yang dilakukan secara teratur untuk memberi informasi kependudukan yang berubah setiap saat. Pada abad ke-19 dan awal abad ke-20 statistika mulai banyak menggunakan bidang-bidang dalam matematika, terutama peluang. Cabang statistika yang pada saat ini sangat luas digunakan untuk mendukung metode ilmiah, statistika inferensi, dikembangkan pada paruh kedua abad ke-19 dan awal abad ke-20 oleh Ronald Fisher (peletak dasar statistika inferensi), Karl Pearson (metode regresi linear), dan William Sealey Gosset (meneliti problem sampel berukuran kecil).

Penggunaan statistika pada masa sekarang dapat dikatakan telah menyentuh semua bidang ilmu pengetahuan, mulai dari astronomi hingga linguistika. Bidang-bidang ekonomi, biologi dan cabang-cabang terapannya, serta psikologi banyak dipengaruhi oleh statistika dalam metodologinya. Akibatnya lahirlah ilmu-ilmu gabungan seperti ekonometrika, biometrika (atau biostatistika), dan psikometrika. Meskipun ada pihak yang menganggap statistika sebagai cabang dari matematika, tetapi sebagian pihak lainnya menganggap statistika sebagai bidang yang banyak terkait dengan matematika melihat dari sejarah dan aplikasinya. Di Indonesia, kajian statistika sebagian besar masuk dalam fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam, baik di dalam departemen tersendiri maupun tergabung dengan matematika.

B. Pengertian Dasar dalam Statistika

Seorang mahasiswa ingin mengetahui pertumbuhan padi mengguakan pupuk kandang dengan cara mengukur ketinggian pagi setiap hari yang dicacat dalam bentuk tabel atau bentuk grafik. Dalam kegiatan tersebut, telah dilakukan sebuah penelitian unuk memperoleh sebuah masalah. Berdasarkan hasil pengukuran tersebut, ia mengadakan berbagai perhiungan kemudian mengambil kesimpulan. Ketika melakukan pengukuran, pencacahan, pengamatan, kemudian melakukan perhitungan dan menarik kesimpulan, ia menggunakan metode tertentu yang memenuhi prinsip-prinsip dalam matematika. Disiplin ilmu yang menerangkan metode itu merupakan cabang dari matematika yang dikenal dengan statistika.

1. *Sampel dan populasi*

   Misal sebuah kecamatan terdiri dari 14 desa. Di wilayah itu akan dilakukan penelitian tentang dampek pemakaian pupuk urea terhadap tanaman padi. Sebagai wakil, dipilih 5 desa sebagai tempat penelitian.

   Pada penelitian ini sebagai populasi adalah seluruh desa yag ada di kecamatan itu, sedangkan sebagai sampel atau contoh diambil 5 desa. Populasi adalah semua objek (orang atau benda) yang akan diteliti (semesta pembicaraan). Sampel adalah bagian dari populasi yang akan dijadikan objek penelitian bersifar representatif (mewakili populasi).

2. *Pengertian Datum dan Data, Data Kualitatif dan Data Kuantitatif, serta Data Cacahan da Data Ukuran*

   a. Datum dan Data

      Datum adalah catatan keterangan atau informasi yang diperoleh dari sebuah penelitian. Datum dapat berbentuk bilangan, lambang, sifat, atau keadaan dari objek yang telah diteliti. Data adalah datum-datum yang telah terkumpul.

   b. Data Kualitatif dan Data Kuantitatif

      Didasarkan pada jenisnya, suatu data dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

      1) Data Kualitatif

         Data kualitatif adalah data yang menunjukkan sifat atau keadaan objek.

      2) Data Kuantitatif

         Data Kuantitatif adalah data yang menunjukkan jumlah ukuran objek, dan disajikan dalam bentuk bilangan-bilangan.

      3) Data Cacahan dan Data Ukuran

         Ditinjau dari cara memperolehnya, data kuantitatif dapat dibedakan dapat dibedakan menjadi 2 macam, yaitu:

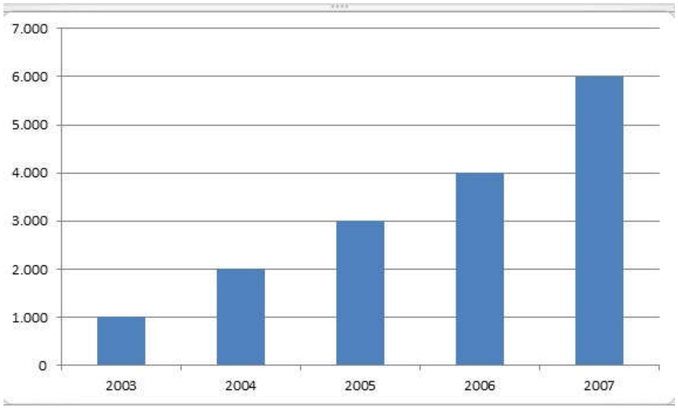
   c. Data Cacahan

      Data cacahan adalah data yang diperoleh dengan cara mencacah, membilang, atau menghitung banyak objek. Sebagai contoh adalah data tentang banyak petak sawah untuk masing-masing desa di lima desa.

d. Data Ukuran
Data Ukuran adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur besaran objek. Sebagai contoh adalah data tentang luas petak sawah dan data tentang berat padi gabah kering.

C. Menyajikan Data dalam Bentuk Diagram dan Tabel

1. Diagram Batang

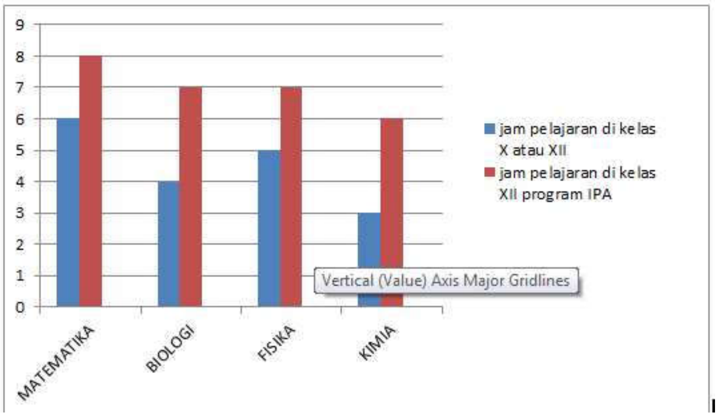


Gambar 8.1

Penyajian data statistik dengan menggunakan gambar berbentuk balok atau batang disebut diagram batang. Batang-batang itu dapat dilukiskan secara tegak (diagram batang tegak) atau mendatar (diagram batang mendatar), tetapi antara batang satu dengan batang lainnya diberi jarak sehingga letak tiap batang tadi tampak terpisah.

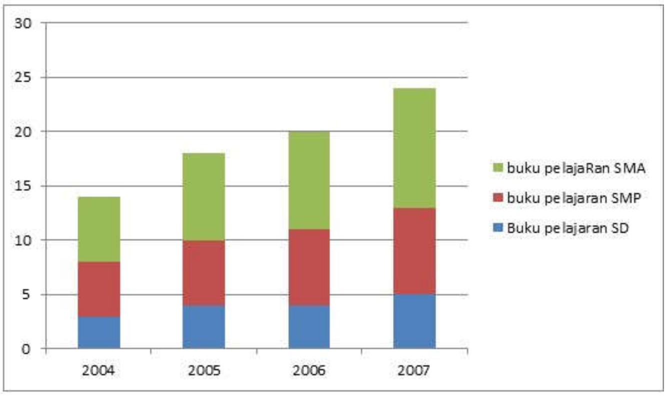
Diagram batang baik yang tegak maupun yang mendatar disebut diagram batang tunggal. Di samping diagram batang tunggal, dikenal dua diagram batang yang lain, yaitu:

a. Diagram batang majemuk,



Gambar 8.2

b. Diagram batang bertingkat,



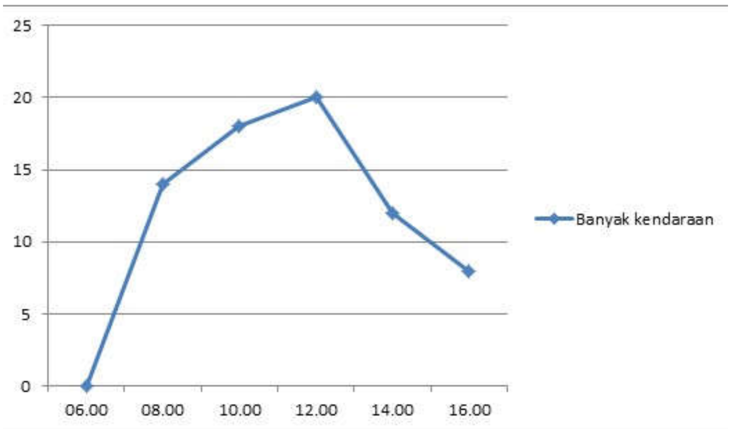
Gambar 8.3

2. Diagram Garis

Data yang disajikan dengan grafikyang berbentuk garis lurus disebut diagram garis atau grafik garis. Diagram garis ini biasaya digunakan untuk menyajikan data yang diperoleh berdasarkan pengamatan dari waktu ke waktu secara beraturan. Diagram garis digambarkan pada bidang Cartesius. Sumbu X ditempati oleh waktu pengamatan sedangkan sumbu Y ditempati oleh nilai data yang diamati.

Selain dibaca dan ditafsirkan, diagram garis dapat juga dipakai untuk memperkirakan suatu nilai yang belum diketahui. Dalam memperkirakan nilai yang belum diketahui ini ada dua macam pendekatan, yaitu pendekatan interpolasi linear dan pendekatan ekstrapolasi linear.

Pukul	06.00	08.00	10.00	12.00	14.00	16.00
Banyak kendaraan	0	14	18	20	12	8



Gambar 8.4

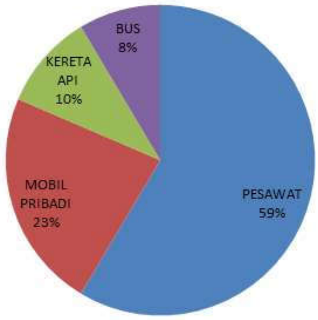
- Interpolasi Linear
  Pendekatan interpolasi linear adalah menafsirkan atau memperkirakan suatu nilai data yang berada di antara dua titik yang berdekatan.

- Ekstrapolasi Linear
  Pendekatan ekstrapolasi linear adalah menaksir atau memperkirakan suatu nilai data yang terletak sesudah titik data terakhir yang

diketahui. Eksplorasi semacam ini dapat dilakukan dengan cara memperpanjang garis dalam arah ke kanan atas atau ke kanan bawah tergantung pada kecenderungan nilai—nilai data sebelumnya.

3. Diagram Lingkaran

Penyajian data statistik dengan menggunakan gambar yang berbentuk daerah lingkaran disebut diagram lingkaran. Daerah lingkaran dibagi kedalam sektor-sektor atau juring-juring. Banyak sektor dalam satu lingkaran menyatakan banyak keterangan data yang hendak disajikan, sedangkan besar sudut sektor sebanding dengan besar nilai data yang disajikan.



Gambar 8.5 diagram lingkaran

4. Tabel Distribusi Frekuensi

a. *Tabel Distribusi Frekuensi Tunggal*

Nilai ulangan x_i	Banyak siswa (Frekuensi) f_i
2	2
3	4
4	5
5	8
6	11
7	6
8	4

b. *Tabel Distribusi Frekuensi Berkelompok*

Untuk membuat tabel distribusi frekuensi dari suatu data dengan ukuran yang sangat besar, lebih mudah jika data itu berkelompok terlebih dahulu kedalam beberapa kelas atau kategori. Setelah data itu dikelompokkan ke dalam kelas-kelas, baru kemudin ditentukan banyaknya (frekuensi) ilai data yang ada pada masing-masing kelasnya.

1) Kelas
2) Batas Kelas

Batas kelas ditetapkan sebagi nilai-nilai ujung yang terdapat pada sebuah kelas. Nilai ujung bawah suatu kelas disebut batas bawah kelas dan nilai ujung atas kelas disebut batas atas kelas.

3) Tepi Kelas

Untuk suatu data yang diperoleh dari hasil pengukuran dengan ketelitian sampai satuan terdekat, maka tepi kelas ditentukan sebagai berikut:

Tepi bawah = batas bawah – 0,5

Tepi atas = batas atas + 0,5

4) Panjang Kelas

Jika masing-masing kelas mempunyai panjang yang sama, maka panjang kelas merupakan selisih antara tepi atas dengan tepi bawah.

$$Panjang\ kelas = tep\ \ atas - tep\ \ baw$$

Panjang kelas disebut juga lebar kelas atau interval kelas.

5) Titik Tengah Kelas

Titik tengah sebuah kelas adalah suatu nilai yang dapat dianggap mewakili kelas itu. Titik tengah kelas disebut juga nilai tengah kelas atau rataan kelas, dan ditetapkan sebagai berikut.

$$Titik\ tengah = \frac{1}{2}\ (batas\ bawah + batas\ atas$$

c. *Menyusun Tabel Distribusi Frekuensi*

Sebelum menyusun tabel distribusi frekuensi berkelompok, terlebih dahulu data harus diurutkan dari nilai yang terkecil sampai dengan yang terbesar. Data yang diurutkan disebut statistik jajaran atau statistik peringkat. Dari statistik jajaran dapat ditetapkan nilai datum terkecil, disebut statistik mnimum yaitu $x_{min} = x_1$ dan nilai datum terbesar disebut statistik maksimum, yaitu $x_{maks} = x_n$ kedua statistik ini (x_{min} dan x_{maks}) disebut sebagai statistik-statistik ekstrim.

Tabel data distribusi berkelompok dapat disusun melalui lankah-langkah sebagai berikut.

- Langkah 1

  Buatlah statistik jajaran dari data mentah, kemudian tentukanlah nilai rentang, yaitu $R = x_{maks} - x_{min}$

- Langkah 2

  Tentukan banyak kelas. Ada beberapa cara dalam menentukan banyak kelas, satu diantaranya adalah dengan menggunakan kaidah empiris Sturgess sebagai berikut.

  $$k = 1 + 3{,}3 \log n$$

  Dengan k menyatakan banyak kelas dan n menyatakan ukuran data.

- Langkah 3

  Tentukan panjang atau interval kelas. Panjang kelas ditetapkan sebagai perbandingan rentang dengan banyak kelas. Jadi,

  $$Panjang\ kelas = \frac{rentang}{banyak\ kelas}$$

- Langkah 4

  Dengan menggunakan nilai rentang kelas yang diperoleh pada langkah 3, tetapkan kelas-kelasnya sehingga mencakup semua nilai amatan.

- Langkah 5

  Tentukan frekuensi setiap kelasnya dengan menggunakan sistem turus.

Contoh:
Suatu data diperoleh dari 40 kali pengukuran (teliti sampai mm terdekat) sebagai berikut.

157 149 125 144 132 156 164 138 144 152
148 136 147 140 158 146 165 154 119 163
176 138 126 168 135 140 153 135 147 142
173 146 162 145 135 142 150 150 145 128

Buatlah tabel distribusi frekuensi berkelompok untuk data tersebut.

Penyelesaian:

- Langkah 1

Statistik jajaran untuk untuk data itu adalah sebagai berikut:

119 125 126 128 132 135 135 135 136 138
138 140 140 142 142 144 144 145 145 146
146 147 147 148 149 150 150 152 153 154
156 157 158 162 163 164 165 168 173 176

Berdasarkan statistik jajaran di atas, diperoleh:
Rentang (range) $R = x_{maks} - x_{min} = 176 - 119 = 57$ mm.

- Langkah 2

Menentukan banyak kelas ditentukan dengan menggunakan kaidah empiris Sturgess. Untuk ukuran data n = 40, diperoleh

$$k = 1 + 3{,}3 \log 40 \cong 6{,}286 \ldots$$

Banyak kelas dibulatkan ke atas menjadi $k = 7$ buah.

- Langkah 3

Menentukan panjang kelas

$$Panjang\ kelas = \frac{rentang}{banyak\ kelas} = \frac{R}{k} = \frac{57}{7} \cong 8{,}1428 \ldots$$

Panjang kelas dibulatkan ke atas menjadi 9 mm.

- Langkah 4

Dengan panjang kelas 9 mm dan nilai statistik minimum ditetapkan sebgai batas bawah kelas pertama (tidak harus demikian), maka diperoleh kelas-kelas dan titik-titik tengah kelas:
Kelas pertama 119 – 127 dengan titik tengah 123,
Kelas kedua 128 – 136 dengan titik tengah 132,
Kelas ketiga 137 – 145 dengan titik tengah 141,
Kelas keempat 146 – 154 dengan titik tengah 150,
Kelas kelima 155 – 163 dengan titik tengah 159,
Kelas keenam 164 – 172 dengan titik tengah 168, dan
Kelas ketujuh 173 – 181 dengan titik tengah 177.

Perhatikan bahwa semua nilai amatan terdistribusikan atau tersebar dalam kelas-kelas tersebut.

- Langkah 5

Tabel distribusi frekuensi berkelompok utuk data tersebut dapat ditampilkan sebagai berikut:

Tabel 1-5

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Titik tengah x_i	Frekuensi f_1
119 – 127	123	3
128 – 136	132	6
137 – 145	141	10
146 – 154	150	11
155 – 163	159	5
164 – 172	168	3
173 – 181	177	2

d. *Menyusun Tabel Distribusi Frkuensi Kumulatif*

Dengan berbekal tabel distribusi frekuensi berkelompok kita dapat menyusun tabel distribusi frekuensi kumulatif. Ada dua macam tabel distribusi frekuensi kumulatif yang dikenal, yaitu:

- Tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari,
- Tabel distribusi kumulatif lebih dari.

Frekuensi kumulatif kurang dari (f_k kurang dari) didefinisikan sebgai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang kurang dari atau sam dengn nlai tepi atas pada tiap-tiap kelas. Frekuensi kumulatif kurang dari dilambangkan dengan $f_k \leq$.

Frekuensi kumulatif lebih dari (f_k lebih dari) didefinisikan sebagai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang lebih dari atau sama dengan nilai tepi bawah pada tiap-tiap kelasnya. Frekuensi kumulatif lebih dari dilambangkan dengan $f_k \geq$. Sebagai ilustrasi, berbekal dengan tabel distribusi frekuensi berkelompok pada tabel 1-5 akan disusun tabel distribusi frekuensi kumulatif. Tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari ditunjukkan oleh tabel 1-6a. Tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari ditunjukkan oleh tabel 1-6b.

Tabel 1-6a

Hasil pengukuran (dalam mm)	Frekuensi kumulatif $f_k \leq$.
$\leq$ 127,5	3
$\leq$ 136,5	9
$\leq$ 145,5	19
$\leq$ 154,5	30
$\leq$ 163,5	35
$\leq$ 172,5	38
$\leq$ 181,5	40

Tabel 1-6b

Hasil pengukuran (dalam mm)	Frekuensi kumulatif $f_k \geq$
$\geq 118{,}5$	40
$\geq 127{,}5$	37
$\geq 136{,}5$	31
$\geq 145{,}5$	21
$\geq 154{,}5$	10
$\geq 163{,}5$	5
$\geq 172{,}5$	2

Selain frekuensi kumulatif mutlak, seringkali perlu menghitung nilai frekuensi kumulatif relatif dari suatu nilai amatan yang kurang dari atau lebih dari suatu batas nilai tertentu. Frekuensi kumulatif relatif biasanya dinytakan dengan persen (%), ditentukan dengan aturan:

$$Frekensi\ kumulatif\ relat \quad \frac{frekuensi\ kumulatif}{ukuran\ data} \times 100\%$$

Sebagai contoh:

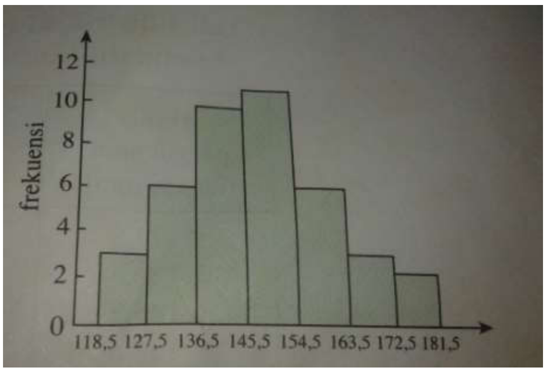
Frekuensi kumulatif relatif lebih dari 136,5 adalah $\frac{31}{40} \times 100\% = 77{,}5\ \%$.

5. Histogram dan Ogif

Data statistik yang tekah diolah menjadi tabel distribusi frekuensi atau tabel distribusi frekuensi kumulatif ternyata dapat pula digambarkan dalam brntuk diagram. Gambar diagram dari suatu tabel distribusi frekuensi disebut histogram dan dari histogram ini selanjutnya dapat digambar poligon frekuensi. Diagram dari suatu tabel frekuensi disebut juga ogif atau ogve.

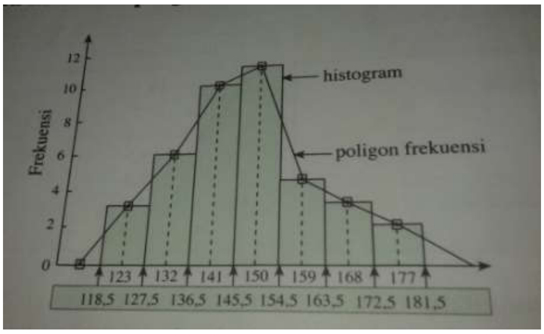
a. *Histogram dan Poligon Frekuensi*

Sajian tabel distribusi frekuensi dengan mengunakan gambar berbentuk persegi panjang-persegi panjang yang saling berimpit disebut histogram.



Gambar 8.6 histogram

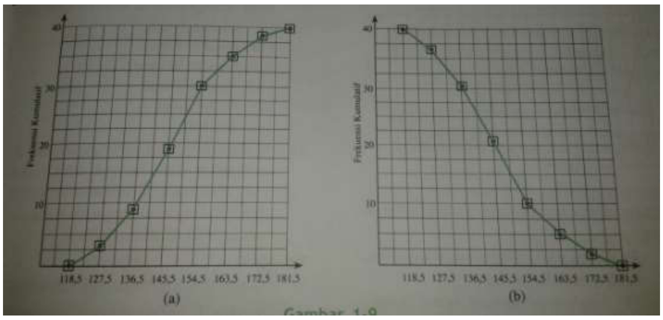
Selanjutnya, apabila titik-titik tengah dari bagian sisi atas persegi panjang pada histgram tersebut dihubungkan, maka diperoleh diagram garis. Diagram garis yang dibentuk dengan cara seperti itu disebut poligon frekuensi.



Gambar 8.7 poligon frekuensi

b. *Ogif*

Ogif (ogive) sering disebut poligon kumulatif. Karena tabel distribusi frekuensi kumulatif ada da macam, yaitu tabel distribusi frekuesi kumulatif “kurang dari” dan tabel distribusi frekuensi kumulatif “lebih dari”, maka grafiknya ada dua macam, yaitu ogif positif dan ogif negatif. Grafik yang dibuat berdasarkan data yang sudah disusun dalam tabel distribusi frekuensi kumulatif “ kurang dari” disebut ogif positif, sedangkan grafik yang dibuat berdasarkan data yang sudah disusun dalam tabel distribusi frekuensi “lebih dari” disebut ogif negatif.

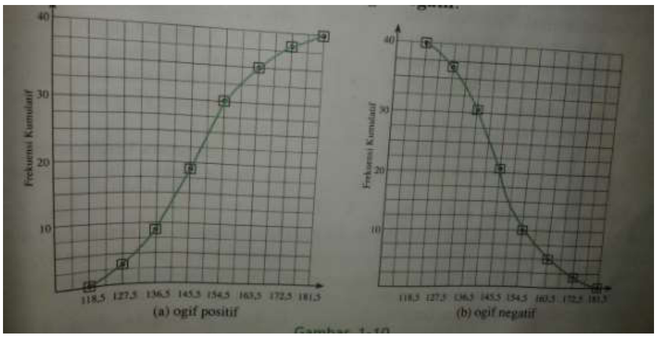


Gambar 8.8

Keterangan:

Gambar (a) poligon frekuensi kumulatif untuk tabel tabel frekuensi kumulatif kurang dari.

Gambar (b) poligon frekuensi kumulatif untuk tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.



Gambar 8.9

Keterangan:

Gambar (a) ogif positif
Gambar (b) ogif negatif

D. Ukuran Pemusatan Data

Rataan, median, dan modus, memberikan gambaran pemusatan nilai-nilai dari suatu kumpulan data yang telah diamati. Oleh karena itu, rataan, median, dan modus disebut sebagai ukuran pemusatan data atau ukuran tendensi senral.

1. Menentukan Rataan

a. Data Tunggal

Rataan (mean) dari suatu data adalah perbandingan jumlah semua nilai datum dengan banyak datum. Dengan demikian,

$$Rataan = \frac{jumlah\ semua\ nilai\ datum\ yang\ diamati}{banyak\ datum\ yang\ diamati}$$

Secara umum:
Jika suatu data terdiri atas nilai-nilai $x_{1,}$ x_2, x_3, ..., x_n, maka rataan dari data itu ditentukan dengan rumus berikut.

$$\overline{x} = \frac{x_{1,} + x_2 +, x_3, +\ldots+ x_n,}{n} \qquad \text{atau } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Keterangan :
$\overline{x}$: rataan dari suatu data
n : banyak datum yang diamati, disebut ukuran data
x_I : nilai datum yang ke-i
notasi $\sum$ menyatakan penjumlahan suku-suku

Contoh:

1. Hitunglah rataan dari data 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10, 10.

Penyelesaian:
Jumlah nilai datum dari data yang diamati adalah

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 10 + 10 = 60.$$

Banyak nilai datum dari data yang diamati adalah n = 8.

Rataan $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(60) = 7{,}5$

Jadi, rataan dari data itu adalah $\overline{x}$ = 7,5.

2. Rataan nilai ujian bahasa Indonesia dari 34 orang siswa 49. Jika nilai seorang siswa yang bernama Ali digabungkan dengan kelompok tadi, nilai rataan yang sekarang menjadi 50. Berapakah nilai ujian bahasa Indonesia yang diperoleh Ali?

Penyelesaian:
Rataan nilai ujian bahasa Indonesia dari 34 orang siswa adalah 49. Ungkapkan ini dapat ditulis $\frac{1}{34}\sum_{i=1}^{34} x_i = 49$

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 34 \times 49 = 1.666$$

Misalkan nilai ujian bahasa Indonesia yang diperoleh Ali adalah x_a. Setelah nlai ini digabungkan rataannya menjadi 50, sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{1}{35}\left[x_a + \sum_{i=1}^{34} x_i\right] = 50$$

$$x_a + \sum_{i=1}^{34} x_i = 35 \times 50$$

$$x_a + 1.666 = 1.750 \left[\textit{substitusi} \sum_{i=1}^{34} x_i = 1.666\right]$$

$$x_a = 1.750 - 1.666 = 84$$

Jadi, nilai ujian bahasa Indonesia yang diperoleh Ali adalah 84.

b. Data Kelompok

Rataan data kelompok dapat ditentukan dengan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i \;.\; x_i}{\sum_{f=1}^{r} f_i}$$

Dengan
- f_i menyatakan frekuensi untuk nilai datum x_i.
- $\sum_{f=1}^{r} f_i = n$ menyatakan ukuran data.
- Untuk data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berkelompok, maka x_i menyatakan titik tengah kelas ke-i dan r menyatakan banyak kelas.

Contoh:
Tentukan rataan dari data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi berkelompok berikut:

Hasil Pengukuran (dalam mm)	titik tengah x_i	Frekuensi f_i	$f_i \,.\, x_i$
119 - 127	123	3	369
128 - 136	132	6	792
137 - 145	141	10	1.410
146 - 154	150	11	1.650
155 - 163	159	5	795
164 - 172	168	2	504
173 - 181	177	3	354
		$\sum f_i = n = 40$	$\sum f_i \,.\, x_i =$ 5.874

Penyelesaian:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i \cdot x_i}{\sum_{f=1}^{r} f_i} = \frac{5.874}{40} = 146,85$$

2. Menentukan Median

Median adalah sebuah nilai datum yang berada di tengah-tengah, dengan catatan data telah diurutkan dari nilai yang terkecil hingga terbesar.

Jika nilai-nilai dalam suatu data telah diurutkan, maka median dari data itu dapat ditentukan sebagai berikut:

a. Jika ukuran data n ganjil, maka mediannya adalah nilai datum yang di tengah atau nilai datum yang ke $\frac{n+1}{2}$. Ditulis:

$$\text{Median} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

b. Jika ukuran data n genap, maka mediannya adalah rataan dari dua nilai datum yang di tengah atau rataan nilai datum yang ke $\frac{n}{2}$ dan nilai datum ke $\left(\frac{n}{2}+1\right)$. Ditulis:

$$\text{Median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Contoh

Tentukan median dari data berikut

a. 4, 5, 7, 9, 10

b. 12, 11, 7, 8, 6, 13, 9, 10

Jawab:

a. Nilai dalam data sudah terurut dengan ukuran data n = 5 (ganjil).

$$\text{Median} = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{5+1}{2}} = x_3 = 7$$

b. Karena nilai dalam data belum terurut maka harus di urutkan terlebih dahulu maka:

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 dengan ukuran data n = 8 (genap).

$$\text{Median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{8}{2}} + x_{\frac{8+1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x_4 + x_5\right) = \frac{1}{2}\left(9+10\right) = 9,5$$

3. Menentukan Modus

a. Data Tunggal

Selain rataan dan median dikenal pula ukuran pemusatan data yang lain, yaitu modus. Modus dari suatu data yang disajikan dalam bentuk statistik jajaran

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$$

Ditentukan sebagai nilai datum yang paling sering muncul atau nilai datum yang mempuntai frekuensi terbesar. Suatu data dapat memiliki lebih dari satu modus atau kadang-kadang tidak memiliki modus sama sekali, hal ini dapat terlihat dalam contoh berikut:

Suatu data 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7 mempunyai modus 6 sebab yang sering muncul adalah nilai datum 6 yautu sebanyak tiga kali.

Selanjutnya data 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10 mempunyai modus 7 dan 8 sebab nilai datum tersebut yang sereing muncul yaitu sebanyak dua kali.

Dan data 1, 2, 3, 4, 5 yang tidak mempunyai modus karena tidak ada datum yang sering muncul.

Dari contoh-contoh di atas tampak bahwa:
1) Ada suatu data yang hanya mempunyai satu modus disebut unimodus, mempunyai dua modus disebut bimodus dan yang mempunyai lebih dari dua modus disebut multimodus.
2) Ada suatu data yang sama sekali tidak mempunyai modus.

Dengan demikian, nilai modus belum dapat dipercaya sebagai ukuran pemusatan data apabila datanya berukuran kecil. Modus hanya berguna sebagai ukuran pemusatan data untuk data yang berukuran besar.

b. Data Kelompok
Langkah-langkah untuk menentukan modus dari data kelompok adalah sebagai berikut:
1) Tentukan kelas modus, yaitu kelas yang memiliki frekuensi terbesar. Kemudian tentukan tepi bawah dan atas dari kelas modus tersebut.
2) Hitung panjang kelas modus.
3) Hitung selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya dan selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.
4) Hitung rumus dengan rumus berikut:

$$\text{Modus} = L + \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right) c$$

dengan
L = tepi bawah frekuensi kelas modus.
δ_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya.
δ_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.
c = panjang kelas modus.

Contoh
Tentukan nilai modus dari tabel berikut:

Nilai	titik tengah x_i	Frekuensi f_i
55 - 59	57	6
60 – 64	62	8
65 – 69	67	16
70 – 74	72	10
75 - 79	77	6
80 - 84	82	4

Penyelesaian:
Kelas modusnya 65 – 69 (karena memiliki frekuensi terbesar, yaitu 16)
Tepi bawah = L = 64,5 dan tepi atasnya = U = 69,5 sehingga panjang kelas $c = U - L = 69{,}5 - 64{,}5 = 5$
Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya $\delta_1 = 16 - 8 = 8$ dan selisih kelas modus dengan kelas sesudahnya $\delta_2 = 16 - 10 = 6$. Jadi modusnya adalah:

$$\text{Modus} = L + \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right)c = 64{,}5 + \left(\frac{8}{8+6}\right)5 = 67{,}36$$

E. Ukuran Letak Data

Ada dua macam ukuran letak data yang akan dibahas yaitu kuartil dan desil.

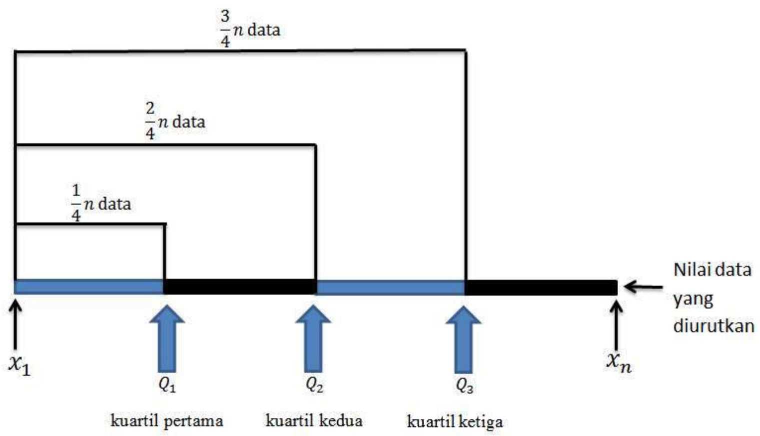
1. Menentukan Kuartil

a. Data Tunggal

Untuk statistik jajaran dengan ukuran data n > 4, dapat ditentukan tida buah nialai yang membagi statistik jajatan itu menjadi empat bagian yang sama. Ketiga nilai ini disebut kuartil, yaitu:

1) Kuartil pertama (Q_1) mempartisi data menjadi $\frac{1}{4}$ bagian dan $\frac{3}{4}$ bagian.
2) Kuartil kedua (Q_2) mempartisi data menjadi $\frac{2}{4}$ bagian atau dengan kata lain adalah median.
3) Kuartil ketiga (Q_3) mempartisi data menjadi $\frac{3}{4}$ bagian dan $\frac{1}{4}$ bagian.

Letak atau lokasi dari kuartil pertama (Q_1), kuartil kedua (Q_2), dan kuartil ketiga (Q_3) dari data dapat ditunjukkan pengan menggunakan bagan berikut:



Gambar 10

Langkah-langkah untuk mencari kuartil adalah:

1) Tentukan median atau kuartil kedua (Q_2) dengan cara mencari median sebelumnya.
2) Kuartil pertama (Q_1) ditentukan sebagai median dari datum yang kurang dari Q_2.

3) Kuartil ketiga (Q_3) ditentukan sebagai median dari datum yang lebih dari Q_2.

Contoh

Tentukan kuartil pertama Q_1, kuartil ke dua Q_2, dan kuartil ke tiga Q_3 untuk data berikut:

1, 3, 6, 9, 14, 18, 21

Penyelesaian:

Nilai dalam data sudah berurutan dan ukuran data n = 7 (ganjil), sehingga:

$Q_2 = x_{\frac{7+1}{2}} = x_4 = 9$

$Q_1 = x_2 = 3$

$Q_3 = x_6 = 18$

- Statistik Lima-serangkai

  Statistik ekstrim (statistik minimum x_{min} dan maksimum x_{max}) dan kuartil-kuartil (kuartil pertama Q_1, kuartil kedua Q_2, dan kuartil ketiga Q_3) adalah lima buah nilai statistik yang dapat ditentukan dari statistik jajaran suatu data.

  Kelima buah statistik ini disebut statistik lima-serangkai, yang biasanya ditampilkan dalam bentuk bagan seperti berikut, yang mencerminkan letak sekaligus pemusatan darin suatu data:

<table>
<tr><td colspan="2">Q_2</td></tr>
<tr><td>Q_1</td><td>Q_3</td></tr>
<tr><td>x_{min}</td><td>x_{max}</td></tr>
</table>

b. Data Kelompok

Nilai Q_1, Q_2 atau median, dan Q_3 dari data berkelompok dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut:

$$\text{Kuartil pertama} = Q_1 = L_1 + \left(\frac{\frac{1}{4}n - (\sum f)_1}{f_1}\right)c$$

dengan L_1 = tepi bawah kelas yang memuat kuartil pertama Q_1.
$(\sum f)_1$ = jumlah frekuensi sebelum kuartil pertama Q_1.
f_1= frekuensi kelas yang memuat kuartil pertama Q_1.

$$\text{Median atau Kuartil kedua} = Q_2 = L_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}n - (\sum f)_2}{f_2}\right)c$$

dengan L_2 = tepi bawah kelas yang memuat kuartil kedua Q_2.
$(\sum f)_2$ = jumlah frekuensi sebelum kuartil kedua Q_2.
f_2= frekuensi kelas yang memuat kuartil kedua Q_2.

$$\text{Kuartil ketiga} = Q_3 = L_3 + \left(\frac{\frac{3}{4}n - (\sum f)_3}{f_3} \right) c$$

dengan $L_3 =$ tepi bawah kelas yang memuat kuartil ketiga Q_3.
$(\sum f)_3 =$ jumlah frekuensi sebelum kuartil ketiga Q_3.
f_3= frekuensi kelas yang memuat kuartil ketiga Q_3.

Contoh

Tentukan kuartil pertama Q_1, kuartil ke dua Q_2, dan kuartil ke tiga Q_3 untuk data berkelompok berikut:

Hasil Pengukuran (dalam mm)	titik tengah x_i	Frekuensi f_i
119 - 127	123	3
128 - 136	132	6
137 - 145	141	10
146 - 154	150	11
155 - 163	159	5
164 - 172	168	2
173 - 181	177	3

Jawab:

a. Kuartil pertama Q_1

$\frac{1}{4}n = \frac{1}{4}40$ =10; L = 136,5; $(\sum f)_1 = 9$; $f_1 = 10$; dan c = 9. Maka:

$$Q_1 = L_1 + \left(\frac{\frac{1}{4}n - (\sum f)_1}{f_1} \right) c = 136{,}5 + \left(\frac{10 - 9}{10} \right) 9 = 137{,}4$$

b. Kuartil kedua Q_2

$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}40$ =20; L = 145,5; $(\sum f)_i = 19$; $f_2 = 9$; dan c = 9. Maka:

$$Q_2 = L_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}n - (\sum f)_2}{f_2} \right) c = 145{,}5 + \left(\frac{20 - 19}{9} \right) 9 = 146{,}5$$

c. Kuartil kedua Q_3

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4}40$ =30; L = 154,5; $(\sum f)_3 = 28$; $f_3 = 7$; dan c = 9. Maka:

$$Q_3 = L_3 + \left(\frac{\frac{3}{4}n - \left(\sum f\right)_3}{f_3} \right) c = 154{,}5 + \left(\frac{30 - 28}{7} \right) 9 = 157{,}07$$

2. *Menentukan Desil*

a. Data Tunggal

Untuk statistik jajatan dengan ukuran n > 10, dapat ditentukan 9 buah nilai yang membagi statistik menjadi 10 bagian yang sama. Kesembilan nilai itu disebut desil, yaitu:

- Desil pertama (D_1), mempartisi data menjadi $\frac{1}{10}$ bagian dan $\frac{9}{10}$ bagian.
- Desil kedua (D_2), mempartisi data menjadi $\frac{2}{10}$ bagian dan $\frac{8}{10}$ bagian.
  ..., demikian seterusnya hingga
- Desil sembilan (D_9), mempartisi data menjadi $\frac{9}{10}$ bagian dan $\frac{1}{10}$ bagian.

Jika suatu data telah dinyatakan dalam bentuk statistik jajaran, maka desil ke-i ditetapkan terletak pada nilai urutan yang ke:

$$\frac{i(n+1)}{10}$$

dengan i = 1, 2, 3, ..., 8, 9 dan n adalah ukuran data.
Jika nilai urutan yang diperoleh bukan bilangan asli, maka untuk menghitung desil diperlukan pendekatan interpolasi linear.
Jika desil terletak pada nilai urutan antara k, k + 1 dan d adalah bagian desimal dari nilai urutan tersebut maka nilai desilnya adalah:

$$D_k = x_k + d(x_{k+1} - x_k)$$

Contoh 13
Diketahui suatu data 2,1 2,4 2,5 2,7 2,9 3,4 3,5 3,7 4,0 4,3 4,7 4,8 5,1 5,3 5,7 tentukan desil pertama D_1 dan desil ke lima D_5

Penyelesaian:
- Desil pertama D_1

  Terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{i(n+1)}{10} = \frac{1(15+1)}{10} = 1,6$. Oleh karena itu nilai urutan bukan nilai asli, maka D_1 ditentukan dengan dengan interpolasi linear. Perhatikan nilai urutan yang besarnya 1,6. Nilai ini terletak antara 1 dan 2 sehingga k = 1 dan k + 1 = 2. Bagian desimalnya d = 0,6 sehingga:
  $D_k = x_k + d(x_{k+1} - x_k)$
  $D_1 = x_1 + d(x_{2+1} - x_1) = 2,1 + 0,6(2,4 - 2,1) = 2,28$

- Desil ke lima D_5

  Terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{i(n+1)}{10} = \frac{5(15+1)}{10} = 8$. Oleh karena itu nilai urutan untuk D_5 adalah 8 merupakan bilangan asli maka D_5 tidak perlu di interpolasi.

$$D_5 = x_8 = 3,7$$

b. Data Kelompok
Desil dari suatu data yang telah dikelompokkan dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut ini:

$$D_i = L_1 + \left(\frac{\frac{1}{10}n - (\sum f)_i}{f_i}\right)c$$

dengan i = 1, 2, 3, ..., 9

D_i = desil ke-i.
L_1 = tepi bawah kelas yang memuat desil ke-i.
$(\sum f)_i$ = jumlah frekuensi sebelum desil ke-i.
f_1 = frekuensi kelas yang memuat desil ke-i.
n = ukuran data
c = panjang kelas

Contoh
Carilah desil ke empat D_4 dari tabel distribusi frekuensi kumulatif berikut:

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi f_i
150 – 154	6
155 – 159	19
160 – 164	40
165 – 169	27
170 – 174	8

Jawab:
Desil ke empat $D_4 = L_4 + \left(\frac{\frac{1}{10}n - (\sum f)_i}{f_i}\right)c$
Substitusi $\frac{4}{10}n = \frac{4}{10}(100)$ =40; L_4 = 159,5; $(\sum f)_4 = 25$; $f_4 = 40$; dan c = 5. Maka:

$$D_4 = 159{,}5 + \left(\frac{40 - 25}{40}\right)5 = 161{,}375$$

F. Ukuran Penyebaran Data

Ukuran penyebaran atau dispersi menunjukkan seberapa besar nilai-nilai dalam suatu kumpulan data memiliki nilai yang berbeda. Beberapa ukuran penyebaran data yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Menentukan Jangkauan
   Jangkauan (range) merupakan ukuran penyebaran data yang sederhana. Jangkauan dari suatu data didefinisikan sebagai selisih antara datum teebesar (statistik maksimum) dengan datum terkecil (statistik minimum). Jika jangkauan dilambangkan dengan R maka:
   $$R = x_{max} - x_{min}$$
2. Menentukan Jangkauan Antarkuartil
   Jangkauan antarkuartil didefinisikan sebagai selisih antar kuartil ketiga Q_3 dengan kuartil pertama Q_1. Jangkauan antarkuartil disebut hamparan (dilambangkan dengan H) maka:
   $$H = Q_3 - Q_1$$
3. Menentukan Simpangan Kuartil
   Simpangan kuartil dari suatu data didefinisikan sebagai setengah kali panjang hamparan. Oleh karena itu, simpangan kuartil disebut juga

rentang semi antarkuartil. Jika simpangan kuartil dilambangkan dengan Q_d maka:

$$Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

4. Menentukan Langkah
   Satu langkah didefinisikan sama dengan satu-setengah kali panjang satu hamparan. Langkah dilambangkan dengan L maka:

$$L = 1\frac{1}{2}H = 1\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

5. Menentukan Pagar-dalam dan Pagar-luar
   Pagar-dalam didefinisikan sebagai sebuah nilai yang letaknya satu langkah dibawah kuartol pertama Q_1 dan pagar-dalam didefinisikan sebagai sebuah nilai yang letaknya satu langkah di atas kuartil ketiga Q_3. Sehingga rumus pagar-luar dan pagar-dalam adalah:

$$\text{Pagar} - \text{dalam} = Q_1 - L$$

dan

$$\text{Pagar} - \text{luar} = Q_3 + L$$

   Pagar dalam dan pagar luar tersebut digunakan sebagai batas penentu normal atau tidaknya nilai data, yang ditetapkan sebgai berikut:
   a. Untuk setiap nilai data x_i yang terletak di antara batas-batas pagar-dalam dan pagar-luar ($Q_1 - L \leq x_i \geq Q_3 + L$) disebut data normal, jika nilai data yang satu dengan yang lain tidak jauh berbeda.
   b. Untuk setiap nilai data x_i yang kurang dari pagar-dalam ($x_i < Q_1 - L$) atau lebih dari pagar-luar ($x_i > Q_3 + L$) merupakan data yang tak normal atau pencilan yaitu data yang tidak konsisten dalam kelompoknya.

   Ada beberapa kemungkinan penyebab munculnya data pencilan dalam suatu data yaitu terjadi kesalahan saat mencatat nilai data, melakukan pengukuran, kesalahan membaca alat ukur dan kesalahan penggunaan alat ukur atau data yang diperoleh memang aneh atau menyimpang.

6. Ragam dan Simpangan Baku
   a. Data Tunggal
      Ukuran penyebaran data yang ada hubungannya dengan nilai rataan dari suatu data adalah ragam dan simpangan baku. Misalkan $\bar{x}$ adalah rataan dari data $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ maka:
      Ragam atau variansi data ditentukan oleh:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

      Simpangan baku atau deviasi standar data ditentukan oleh:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

dengan n = ukuran data, x_i = nilai datum yang ke-i, dan $\bar{x}$ = nilai rataan.

Contoh 16
Tentukan ragam S^2 dan simpangan baku S untuk data: 10, 44, 56, 62, 65, 72, 76.

Penyelesaian:
10, 44, 56, 62, 65, 72, 76 ukuran data $n = 7$.
Nilai rataan:

$$\bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$= \frac{1}{7}(10 + 44 + 56 + 62 + 65 + 72 + 76) = \frac{1}{7}(385) = 55$$

Jumlah kuadrat setiap simpangannya:

$$\sum_{i=1}^{7}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_7 - \bar{x}\right)^2$$

$$= (10-55)^2 + (44-55)^2 + (56-55)^2 + (62-55)^2 + (65-55)^2 + (72-55)^2 + (76-55)^2$$

$$= 3.026$$

- Ragamnya:

  $$S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{7}\left(3.026\right) = 432,29$$

- Simpangan bakunya:

  $$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{432{,}29} = 20.79$$

b. Data Kelompok

Ragam dari suatu data yang disajikan dengan menggunakan daftar distribusi frekuensi dapat ditentukan dengan rumus:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

Sedangkan simpangan bakunya ditentukan oleh:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

dengan $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ = ukuran data.

r = menyatakan banyak kelas

untuk data yang dikelompokkan dalam kelas-kelas, f_i menyatakan frekuensi kelas ke-i dan x_i menyatakan titik-tengah kelas ke-i.

Contoh:

Hitunglah ragam dan simpangan baku dari data yang disajikan dengan menggunakan daftar distribusi frekuensi berkelompok berikut:

Hasil Pengukuran (dalam mm)	titik tengah x_i	Frekuensi f_i	$f_i \, . \, x_i$
119 – 127	123	3	369
128 – 136	132	6	792
137 – 145	141	10	1.410
146 – 154	150	11	1.650
155 – 163	159	5	795
164 – 172	168	2	504
173 – 181	177	3	354
		$\sum f_i = n = 40$	$\sum f_i \, . \, x_i = 5.874$

Penyelesaian:
Nilai rataan hitung pada tabel tersebut adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i \, . \, x_i}{\sum_{f=1}^{r} f_i} = \frac{5.874}{40} = 146,85$$

Selanjutnya untuk menentukan ragam dan simpangan bakunya disusun tabel seperti berikut:

Hasil Pengukuran (dalam mm)	titik tengah x_i	Frekuensi f_i	$f_i \, . \, x_i$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
119 – 127	123	3	369	1.706,47
128 – 136	132	6	792	1.323,14
137 – 145	141	10	1.410	342,225
146 – 154	150	11	1.650	109,1475
155 – 163	159	5	795	738,1225
164 – 172	168	2	504	1.341,97
173 – 181	177	3	354	1.818,05
		$n = 40$	$\sum f_i \, . \, x_i =$ 5.874	7.379,1

Ragamnya:

$$S^2 = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{40}(\,7.379,1) = 184,48$$

Simpangan bakunya:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{184,48} = 13,58$$

G. Kesulitan yang Sering Dihadapi Siswa

Beberapa kesulitan yang dialami siswa dalam pembelajaran materi Statistik antara lain:

1. Siswa kesulitan dalam membedakan modus dengan median

2. Siswa kesulitan dalam membedakan penyajian data berbentuk diagram dan grafik

Alternatif Solusi Pembelajaran dapat dilakukan dengan:

1. Guru menekankan konsep Modus dan Median dengan kegiatan-kegiatan yang dapat dipraktekkan siswa sehingga siswa mudah mengingat sendiri. Selanjutnya siswa diberikan latihan-latihan untuk meningkatkan pemahaman tersebut.
2. Siswa diberikan data-data dan diminta menggambar sendiri diagram dan grafik. Dengan begitu jika siswa bekerja sendiri maka ingatan atau pemahaman akan lebih baik dan tidak mudah lupa.

Latihan Soal

1. Diketahui data hasil penelitian sebagai berikut:

10	18	17	10	18	15	11	20	18	24
11	14	23	18	16	20	15	10	12	14
21	19	13	16	14	26	12	17	18	19
12	26	18	25	15	21	10	14	20	25

   Buatlah tabel distribusi frekuensi untuk data tersebut.

2. Perhatikan tabel berikut.

Hasil Ulangan	Frekuensi
65 – 67	2
68 – 70	5
71 – 73	13
74 – 76	14
77 – 79	4
80 – 82	2

   Berdasarkan tabel ditas carilah:
   a. Rataan
   b. Median
   c. Modus
   d. Simpangan baku
   e. Kuartil pertama sampai kuaril ketiga

BAB IX
PELUANG

A. Pendahuluan

Gambar 1. Girolamo Cardano (1501-1576)

Teori peluang menyangkut dengan cara menentukan hubungan antara sejumlah kejadian khusus dengan jumlah kejadian sebarang. Misalnya pada kasus pelemparan uang sebanyak seratus kali, berapa kali akan munculnya gambar.

Teori peluang awalnya diinspirasi oleh masalah perjudian. Awalnya dilakukan oleh matematikawan dan fisikawan Itali yang bernama Girolamo Cardano (1501-1576). Cardano lahir pada tanggal 24 September 1501. Cardano merupakan seorang penjudi pada waktu itu. Walaupun judi berpengaruh buruk terhadap keluarganya, namun judi juga memacunya untuk mempelajari peluang. Dalam bukunya yang berjudul Liber de Ludo Aleae (Book on Games of Changes) pada tahun 1565, Cardano banyak membahas konsep dasar dari peluang yang berisi tentang masalah perjudian. Sayangnya tidak pernah dipublikasikan sampai 1663. Girolamo merupakan salah seorang dari bapak probability.

Cardano juga berjasa dalam memperkenalkan koefisien binomial dan teorema binomial, yang ia publikasikan dalam bukunya Opus novum de proportionibus. Meskipun begitu, Cardano yang telah ketagihan berjudi, sempat menjadi miskin karenanya. Namun ada berkah dibalik ini, ia kemudian menulis buku yang berjudul Liber de ludo aleae (Book on Games of Chance) yang ditulis pada tahun 1526 namun tidak pernah dipublikasikan sampai tahun 1663. Dalam buku ini, dijelaskan tentang ilmu peluang (probabilitas) secara sistematik. Bagian yang terkenal dari bukunya adalaheffective cheating method (cara curang yang efektif). Di bukunya, Cardano menulis tentang permasalahan peluang di antaranya:

1. Jika 3 buah dadu dilempar bersamaan sebanyak 3 kali, berapa peluang untuk mendapatkan mata dadu minimal (1,1) pada setiap lemparan?
2. Jika 2 buah dadu dilempar bersamaan sebanyak 3 kali, berapa peluang untuk mendapatkan mata dadu (1,1) paling sedikit dua kali?

Penemuannya tidak hanya dalam bidang matematika, namun juga dalam hal yang lain. Ia menemukan beberapa alat seperti kunci kombinasi, gimbal, yang terdiri dari tiga cincin konsentris, dan as dengan universal joint, yang memungkinkan gerakan berputar dalam beberapa sudut. Ia menamakan ini dengan Cardan shaft. Tidak hanya itu, ia juga berperan dalam hidrodinamik, di mana ia menyatakan kalau gerakan yang tiada henti adalah mustahil, kecuali pada benda-benda ruang angkasa. Pada tahun 1550, Cardanomemperkenalkan Cardan grill, yang merupakan suatu metode untuk menulis rahasia dengan menggunakan grid (biasa digunakan dalam kriptografi). Pada tahun 1570, ia menemukan hiposikloid, yang ia namakan lingkaran Cardano, atau lingkaran Cardanic, di mana hal ini dipublikasikan dalam bukunya de proportionibus.

Cardano menjadi rektor di College of Physicians dan memperoleh reputasi sebagai dokter terbesar di dunia. Cardano menerima banyak tawaran dari kepala negara di Eropa yang ingin mendapatkan pelayanan medis terbaik. Cardano juga diangkat sebagai profesor bidang kedokteran di University of Pavia. Berada di puncak ketenarannya, ia menerima pukulan terberat dalam hidupnya, sesuatu yang ia sebut crowning misfortune. Putra tertua Cardano diam-diam menikah dengan seorang gadis yang kemudian ia racuni. Ia mengakui kejahatannya dan ia pun dipenjara karenanya. Sebagai ayah dari seorang pembunuh, Cardanomenjadi seorang pria yang dibenci. Dan pada tahun 1570, Cardano sendiri dimasukkan ke dalam penjara dengan tuduhan pelecehan Yesus Kristus. Setelah dibebaskan beberapa bulan kemudian, ia dilarang untuk mengadakan pertemuan dengan universitas dan dilarang untuk publikasi lebih lanjut dari karyanya.

Cardano dilaporkan telah benar memprediksi tanggal pasti dari kematiannya sendiri (21 September 1576). Namun ternyata telah diselidiki bahwa ia dapat memprediksi hal ini karena ia bunuh diri.

B. Notasi Faktorial

Definisi 1:

Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan:

$$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots..(3).(2).(1)$$

Notasi $n!$ dibaca " n faktorial ".

Definisi 2:

$$1! = 1 \; dan \; 0! = 1$$

Contoh:

a. 2! = 2 . 1 = 2
b. 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720

C. Permutasi

Permutasi adalah susunan beberapa unsur, baik dari unsur-unsur yang berbeda maupun unsur-unsur yang sama secara siklis ataupun berulang. Misalnya terdapat 3 kartu yang berbeda bertuliskan *x, y, z*. Jika kartu tersebut disusun 2 kartu dengan urutan berbeda, maka susunan yang diperoleh adalah *xy, xz, yx, yz, zx, zy*. Tiap susunan itu disebut permutasi kartu yang disusun dari 3 kartu berbeda yang disediakan. Bentuk-bentuk permutasi:

1. Permutasi dari Unsur Umum Berbeda
   Definisi:
   Permutasi k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah susunan dari k unsur tersebut dalam suatu urutan dimana $k \leq n$. Dilambangkan dengan ${}_{n}P_{k},\ P_{n}^{k}$, *atau* $P_{(n,k)}$.

   a. Untuk $k < n$, dirumuskan: ${}_{n}P_{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

b. Untuk $k = n$, yaitu permutasi dari n unsur tersedia yang dirumuskan:
$_nP_k = n!$

2. Permutasi dengan beberapa Unsur yang Sama
Definisi:
a. Banyaknya permutasi n unsur yang memuat k unsur sama ($k \leq n$):
$P = \frac{n!}{k!}$
b. Banyaknya permutasi n unsur yang memuat k_1 unsur sama, k_2 unsur sama, k_3 unsur sama, ……, k_n unsur sama adalah:
$P = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ dengan $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \leq n$
c. Jika tersedia n unsur yang memuat $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ unsur sama, maka banyaknya permutasi k unsur yang diambil dari n unsur tersedia adalah:
$P = \frac{n!}{(n-k)!k_1!k_2!k_3!\ldots k_n!}$ dengan $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \leq n$

3. Permutasi Siklis (Keliling)
Definisi:
Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyaknya permutasi siklis adalah:
$P_s = (n-1)!$

4. Permutasi Berulang
Definisi:
Jika tersedia n unsur yang berbeda maka banyaknya permutasi berulang k unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia adalah:
$P_r = n^k$

D. Kombinasi

Permutasi 2 kartu yang disusun dari 3 kartu yang bertuliskan *x, y, z* adalah *xy, xz, yx, yz, zx, zy*. Maka pada permutasi tersebut urutannya diperhatikan, akan tetapi jika urutan tersebut tidak diperhatikan maka susunannya menjadi *xy* = *yx, xz* = *zx, yz* = *zy*. Jadi hanya terdapat 3 susunan. Susunan yang demikian disebut kombinasi 2 unsur yang diambil dari 3 unsur.

Definisi:
Kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah susunan dari k unsur tanpa memeperhatikan urutannya maka $k \leq n$. Dilambangkan dengan $_nC_k$, C_n^k, $atau$ $C_{(n,k)}$. Dirumuskan dengan:

$$_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Kombinasi dari unsur yang berbeda diambil sembarang banyaknya sekaligus

Definisi:
Banyaknya kombinasi n unsur yang diambil 1, 2, 3, …., n sekaligus adalah:
$C = 2^n - 1$

E. Peluang Suatu Kejadian

1. Ruang Sampel

Kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi disebut dengan ruang sampel (disimbolkan *S*) dan himpunan bagian *S* disebut dengan hasil yang diharapkan muncul atau kumpulan dari hasil yang diharapkan muncul dari sebuah percobaan (disimbolkan *E*). Jadi, ingat, ruang sampel adalah sebuah himpunan. Banyaknya anggota dalam himpunan S disebut dengan kardinal S (disimbolkan $n(S)$). Sedangkan setiap anggota ruang sampel disebut titik sampel.

Contoh:

a. Pelemparan 3 buah koin

Ada 8 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 1. Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 3 koin

Koin 1	A	A	A	A	G	G	G	G
Koin 2	A	A	G	G	A	A	G	G
Koin 3	A	G	A	G	A	G	A	G

b. Pelmparan 2 buah dadu

Tabel 2. Pasangan mata dadu I dan mata dadu II

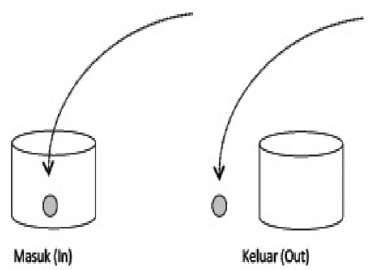
		Dadu I					
		1	2	3	4	5	6
Dadu II	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

2. Frekuensi Kumulatif

Misalkan *E adalah* suatu hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan. Frekuensi Relatif *E* atau $fr(E)$ adalah hasil bagi antara banyak hasil *E* dengan banyak percobaan.

Contoh:

Seorang anak melakukan sebuah permainan melempar bola ke sebuah tabung yang diletakkan beberapa meter di depannya. Bola terkadang masuk dan terkadang keluar dari tabung tersebut. Anak tersebut melakukan lemparan bola sebanyak 100 kali. Hasil lemparan (masuk atau keluar) ditampung dalam papan tabel sebagai berikut.



Gambar 9.2. Melempar bola kedalam tabung

Tabel 10.3. Frekuensi lemparan bola (masuk/keluar)

Hasil Lemparan	Jumlah (Frekuensi)	
Hasil	Masuk (In)	45
	Keluar (Out)	55

Tabel 10.4. Frekuensi relatif lemparan bola

Hasil Lemparan	Jumlah (frekuensi)	% Hasil
Masuk (In)	45	45%
Keluar (Out)	55	55%
Total Lemparan	100	100%

3. Peluang Kejadian

Peluang suatu kejadian adalah hasil bagi antara banyaknya hasil yang memenuhi kejadian yang dimaksud dengan banyaknya semua hasil yang mungkin (ruang sampel).

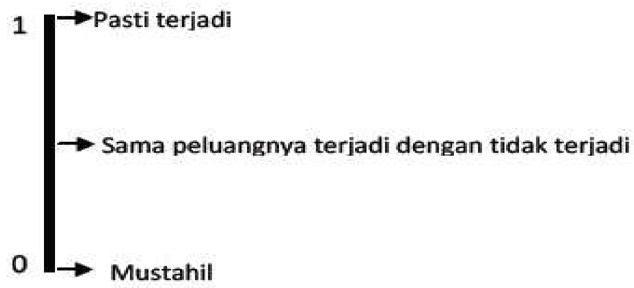
a. Titik sampel atau hasil yang mungkin terjadi peda sebuah percobaan.
b. Kejadian (E) adalah hasil yang mungkin terjadi atau kumpulan hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
c. Ruang sampel (S) adalah himpunan semua hasil dari suatu percobaan.
d. Kejadian (Ec) adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang tidak memuat kejadian E. (Ec dibaca komplemen E)

$$\textbf{Rumus Peluang} = \frac{n\ (E)}{n\ (S)}$$

Keterangan:
n (E) : Banyaknya anggota kejadian E
n (S) : Banyaknya anggota ruang sampel

Peluang kejadian E memenuhi $P(E)$, $0 \leq P(E) \leq 1$

Peluang suatu kejadian adalah 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti terjadi dan peluang kejadian adalah 0 berarti bahwa kejadian tersebut mustahil terjadi.



Gambar 9.3. Peluang kejadian E memenuhi $P(E)$, $0 \leq P(E) \leq 1$

4. Frekuensi Harapan

Definisi:

Misalkan sutu percobaan dilakukan sebanyak n kali dengan peluang kejadian A adalah P(A). Frekuensi harapan kejadian dirumuskan:

$$F(A) = n \times P(A)$$

F. Peluang Kejadian Majemuk

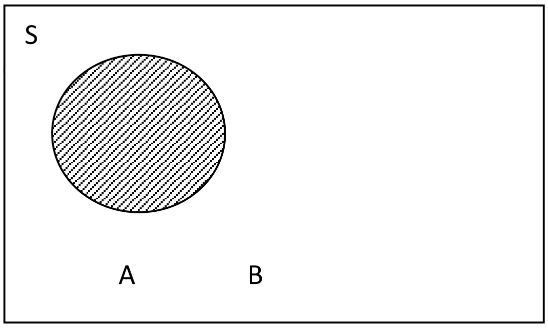
Kejadian dapat diperoleh dari beberapa kejadian sederhana dengan cara menggabungkan dengan *operasi gabungan (union)* dan *irisan (interseksi)*. Pada gabungan dua kejadian, misalkan *A* dan *B* adalah kejadian dalam ruang sampel *S*, maka dapat dibentuk kejadian $A \cup B$ yaitu kejadian apabila *A* terjadi atau *B* terjadi atau kejadian kedua-duanya.

Irisan dua kejadian, misalkan *A* dan *B* kejadian dalam ruang sampel *S*, maka dapat dibentuk kejadian $A \cap B$ yaitu kejadian apabila kejadian *A* terjadi dan *B* terjadi.

1. Peluang Gabungan Suatu Kejadian

Definisi 1:

Jika *A* dan *B* suatu kejadian dalam ruang sampel *S*, maka peluang kejadian *A* atau *B* dinyatakan dengan memperhatikan gambar berikut:



Gambar 9.4. $A \cup B$

Karena *A* dan *B* adalah dua kejadian yang saling terikat (tidak saling lepas) maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\frac{n(A\ \mathrm{B})}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A\ \mathrm{B})}{n(S)}$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A\ \mathrm{B})}{n(S)}$$

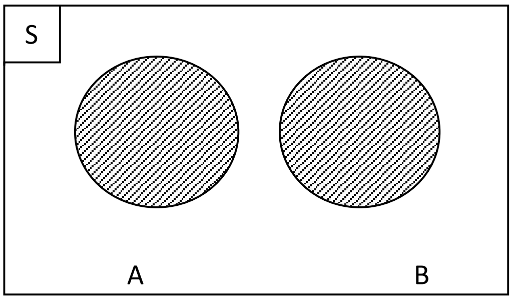
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Jadi peluang kejadian *A* atau *B* dengan *A* dan *B* kejaadian saling terikat adalah:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Definisi 2:

Jika *A* dan *B* dua kejadian saling asing (saling lepas) maka $A \cap B = \varnothing$ sehingga $p(A \cap B) = 0$. Peluang kejadian *A* atau *B* dinyatakan dengan gambar berikut:



Gambar 5. $A \cup B$ dengan $A \cap B = \varnothing$

Karena A dan B adalah dua kejadian yang saling asing (saling lepas) maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\frac{n(A\ \mathrm{B})}{n(S)} = \frac{n(A)+n(\mathrm{B})}{n(S)}$$

$$\frac{n(A\ \mathrm{B})}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Jadi peluang kejadian A atau B dengan A dan B kejadian yang saling asing (saling lepas) adalah :

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

Contoh:

Terdapat 15 kartu yang diberi nomor 1 sampai 15, jika diambil sebuah kartu seara acak, berapa peluang terambilnya kartu dengan nomor bilangan prima atau nomor bilangan ganjil ?

Jawab:

Misalkan:

A = kejadian terambilnya kartu dengan nomor bilangan prima = { 2, 3, 5, 7, 11, 13 }

$n(A)$ = 6 maka $p(A) = \frac{6}{15}$

B = kejadian terambilnya kartu dengan nomor bilangan ganjil = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 }

$n(B)$ = 8 maka $p(B) = \frac{8}{15}$

$A \cap B = 5$ maka $p(A \cap B) = \frac{5}{15}$

Maka peluang terambilnya sebuah kartu dengan nomor bilangan prima atau nomor bilangan ganjil adalah:

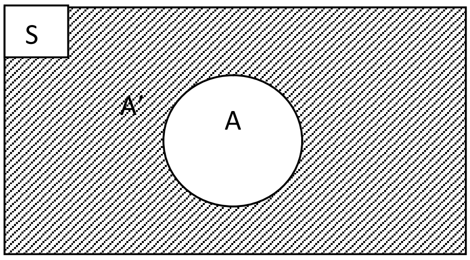
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{15} + \frac{8}{15} - \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

2. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Definisi 3:

Misalkan A adalah kejadian dalam ruang sampel S dan A' adalah komplemen kejadian A maka A dan A' adalah dua kejadian yang saling asing (lepas) sehingga $A \cap A' = \varnothing$. Perhatikan gambar berikut. Karena A dan A' adalah dua kejadian yang saling asing maka:



Gambar 6. A^c

Gambar diatas menunjukkan $A \cap A' = \varnothing \rightarrow n(A \cap A') = 0$, kemudian $A \cup A' = S \rightarrow n(A \cup A') = n(S)$

Dengan menggunkan definisi 2 maka:

$p(A \cup A') = p(A) + p(A')$; dimana $p(A \cup A') = p(S) = 1$

$1 = p(A) + p(A')$

$p(A') = 1 - p(A)$

Jadi peluang kejadian A′ dinyatakan dengan: $p(A') = 1 - p(A)$

Contoh:

Sebuah bidang lingkaran bernomor 1 samapi 7 memiliki jarum peunjuk. Bila jarum diputar, berapakah peluang jarum menunjuk bolangan yang habis dibagi 2? Hitung peluang jarum menunjuk bilangan yang tidak habis dibagi 2!

Jawab:

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ maka $n(S) = 7$

A adalah kejadian jarum menunjuk bilangan yang habis dibagi 2.

$A = \{2, 4, 6 \}$, $n(A) = 3$ maka $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{7}$

A′ adalah kejadian jarum menunjuk bilangan yang tidak habis dibagi 2, maka $p(A') = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

3. Peluang Kejadian Saling Bebas (Saling Bebas Stokhastik)

Kejadian *saling bebas stokhastik* adalah dua kejadian dimana munculnya kejadian yang satu tidak akan mempengaruhi munculnya atau tidak munculnya kejadian yang lain atau sebaliknya.

Misalkan A adalah kejadian dalam ruang sampel S_1 dan B adalah kejadian dalam ruang sampel S_2. Ruang sampel untuk kejadian A dan B adalah S. Dengan kaidah dasar membilang dapat ditentukan bahwa $n(S) = n(S_1) \cdot n(S_2)$. Jika A dan B adalah dua kejadian yang saling bebas sehingga setiap anggota A dapat muncul bersama-sama dengan setiap anggota B, maka kejadian " A dan B " dinotasikan dengan " $A \cap B$ "

adalah himpunan pasangan terurut (a,b) dengan a $\in A$ dan b $\in B$. Maka dapat dijelaskan:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A\ \mathrm{B})}{n(S)} = \frac{n(A)\ .\ (\mathrm{B})}{n(S_1).\mathrm{n}(S_2)} = \frac{n(A)}{n(S_1)} \cdot \frac{n(B)}{n(S_2)} = p(A)\ .\ p(B)$$

Definisi 4:
Bila A dan B adalah kejadian saling bebas jika dan hanya jika $p(A \cap B) = p(A)\ .\ p(B)$. Jika $p(A \cap B) \neq p(A)\ .\ p(B)$ maka A dan B merupakan kejadian yang tidak saling bebas.

Contoh:
Pada pelemparan dua buah dadu masing-masing berwarna hitam dan biru. Bila A adalah kejadian mata dadu biru muncul bilangan komposit dan B adalah kejadian maat dadu hitam muncul bilangan prima. Tentukan peluang kejadian A dan B!

Penyelesaian:

		Dadu Hitam					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Biru	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

S = { (1, 1), (1, 2), … , (6, 5), (6, 6) } maka $n(S) = 36$
A = { (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 3), (6,4), (6, 5), (6, 6) } maka $n(A) = 12$
B = { (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4,3), (5, 3), (6, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5) } maka $n(B) = 18$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ dan } p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$ = { (4, 2), (4, 3), (4, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 5) } dan

$$p(A \cap B) = \frac{n(A\ B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Karena A dan B adalah kejadian-kejadian saling bebas stokhastik, maka:

$$p(A \cap B) = p(A)\ .\ p(B) \leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}$$

4. **Peluang Kejadian Bersyarat**

Definisi 5:
Jika A dan B suatu kejadian bersyarat , maka peluang munculnya kejadian A setelah kejadian B dituliskan $p(A|B)$, ditentukan dengan:

$$\boxed{p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Contoh:
Tiga keeping uang logam dileparkan sekali. Misalkan A sisi angka dan G sisi gambar, tentukan peluang:

a. Munculnya sekurang-kurangnya dua sisi gambar setelah munculnya mata uang pertama sisi gambar!
b. Munculnya sisi gambar pada mata uang setelah munculnya sekurang-kurangnya dua kali sisi gambar!

Jawab:
S = {GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA} dengan n(S) = 8

Misalkan:
A = kejadian munculnya sekurang-kurangnya dua sisi gambar
= { GGG, GGA, GAG, AGG } dengan $n(A) = 4$

Maka $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B = kejadian munculnya mata uang pertama sisi gambar
= {GGG, GGA, GAG, GAA}

Maka $p(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ = {GGG, GAG, GAA} dengan $n(A \cap B) = 3$, maka $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

Maka dapat ditentukan:

a. $p(A|B) = \dfrac{p(A\ B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

$p(B|A) = \dfrac{p(A\ B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

5. Peluang Kejadian Pengambilan Dengan Dan Tanpa Pengembalian

Suatu percobaan pengambilan sebuah kartu dari satu set kartu bridge secara berurutan sebanyak dua kali. Pada pengambilan pertama, peluang untuk mendapatkan sebuah kartu Queen adalah $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Jika dilanjutkan dengan pengambilan kedua, maka peluang untuk mendapatkan sebuah kartu Queen lagi akan ditentutakan, apakah kartu pertama yang telah diambil dikebalikan lagi atau tidak.

Misalkan:
A_1 = kejadian terpilihnya kartu Queen pada pengambilan pertama
A_2 = kejadian terpilihnya kartu Queen pada pengambilan kedua

$A_1 \cap A_2$ = kejadian terpilihnya kartu Queen pada pengambilan pertama dan kedua

Maka perbedaan dalam menentukan peluang dijelaskan sebagai berikut:

a. Pengambilan Kartu dengan Pengembalian

Diketahui $p(A_1) = \frac{1}{13}$. Jika setelah pengambilan kartu Queen pertama dikembalikan lagi, maka kartu kembali utuh menjadi 52 lembar. Peluang untuk mendapatkan kartu Queen pada pengambilan kedua (A_2) setelah pengambilan pertama (A_1) dituliskan $p(A_2|A_1)$ ditentukan:

p($A_2|A_1$) karena A_1 telah terjadi dan dengan pengembalian maka peluang untuk A_2 ialah $p(A_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Jadi peluang terpilihnya kartu Queen pada pengambilan pertama dan kedua dengan pengembalian adalah:

$p(A_1 \cap A_2) = p(\mathrm{A}_1)\ .\ \mathrm{p}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1) = \mathrm{p}(\mathrm{A}_1)\ .\ \mathrm{p}(\mathrm{A}_2) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

b. Pengambilan Kartu Tanpa Pengembalian

Jika pada kartu Queen yang pertama tidak dikembalikan lagi maka pada pengambilan kedua tinggal tersisa 51 kartu bridge dan tersisa 3 kartu Queen. Peluang untuk mendapatkan kartu Queen pada pengambilan kedua (A_2) setelah pengambilan pertama (A_1) dituliskan $p(A_2|A_1)$ ditentukan:

$p(A_2|A_1) = \frac{3}{51}$

Jadi peluang terpilihnya kartu Queen pada pengambilan pertama dan kedua tanpa pengembalian adalah:

$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\ .\ p(A_2|A_1) = \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{52} = \frac{3}{663} = \frac{1}{221}$

Dari percobaan diatas dapat disimpulkan bahwa pada percobaan pengambilan sampel dengan pengembalian, kejadian A_1 dan A_2 merupakan kejadian saling bebas. Maka peluang kejadian A_1 dan A_2 ditentukan

$$\boxed{p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\ .\ p(A_2|A_1) = p(A_1)\ .\ p(A_2)}$$

Pada percobaan pengambilan sampel tanpa pengembalian, kejadian A_1 dan A_2 merupakan kejadian bersyarat, yaitu kejadian A_2 setelah kejadian A_1 sehinngga $p(A_2|A_1) = \frac{P(A1 \cap A2)}{p(A1)}$ maka peluang A_1 dan A_2 ditentukan:

$$\boxed{p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\ .\ p(A_2|A_1)}$$

Contoh:

Sebuah bejana memuat 6 kelereng merah dan 4 kelereng putih. Diambil secara acak dua kali berturut-turut, masing-masing satu kelereng tanpa pengembalian. Berapa peluang yang terambil:

1) Kelereng merah pada pengambilan pertama dan kedua
2) Kelereng merah pada pengembalian pertama dan kelereng putih pada pengembalian kedua

Jawab:
Misalkan:
A_1 = kejadian terambilnya kelereng merah pada pengambilan pertama
A_2 = kejadian terambilnya kelereng merah pada pengambilan kedua
B = kejadian terambilnya kelereng putih pada pengambilan kedua

1) $p(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ dan $p(A_2|A_1) = \frac{5}{9}$
   Maka peluang terambilnya kelereng merah pada pengambilan pertama dan kedua tanpa pengembalian adalah:
   $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \,.\, p(A_2|A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$
2) $p(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ dan $p(B|A_1) = \frac{4}{9}$
   Maka peluang terambilnya kelereng merah pada pengambilan pertama dan kelereng putih pada pengambilan kedua tanpa pengembalian adalah:
   $P(A_1 \cap B) = p(A_1) \,.\, p(B|A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

Contoh Soal

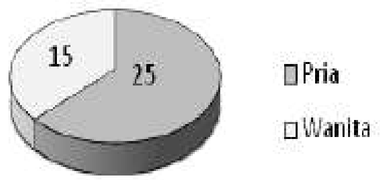
1. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri dari 2 angka yang dapat disusun dari angka-angka 4, 5, 6, 7, dan 8 tanpa pengulangan!

   Alternatif Penyelesaian:
   $${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\,.4.3.2.1}{3.2.1} = 5.4 = 20$$

2. Berapakah banyaknya bilangan yang terdiri dari 2 angka yang disusun dari angka-angka 2, 3, 5, 7, jika angka-angka yang tersedia boleh ditulis berulang?
   Alternatif Penyelesaian:
   Banyaknya unsur $n = 4$
   Banyak unsur $k = 2$
   Maka $P_r = n^k = 4^2 = 16$

3. Suatu pesta ada 100 tamu yang saling berjabat tangan. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
   Alternatif Penyelesaian:
   $${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{100!}{(100-2)!2!} = \frac{100!}{98!2!} = \frac{100.99.98!}{98!2.1} = 50.99 = 4.950$$

4. Di dalam sebuah kelas terdapat 40 orang siswa, yaitu 25 pria dan 15 wanita. Di antara mereka akan dipilih satu orang untuk menjadi ketua kelas. Tentukan peluang terpilih adalah siswa pria? Tentukan peluang terpilih adalah siswa wanita?
   Alternatif Penyelesaian:



Gambar 9.4. Diagram lingkaran jumlah pria dan wanita

S adalah himpunan siswa pria sehingga $n(S) = 40$
E adalah himpunan siswa pria sehingga $n(E) = 25$
Ec adalah himpunan siswa wanita sehingga $n(E^c) = 15$

Peluang terpilih pria adalah $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{25}{40}$

Peluang terpilih wanita adalah $P(E^C) = \dfrac{n(E^C)}{n(S)} = \dfrac{15}{40}$

Jelas, bahwa $P(E) + P(E^C) = \dfrac{25}{40} + \dfrac{15}{40} = 1$

5. Dua koin setimbang dan sebuah dadu sisi 6 ditos. Tentukanlah peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut.

Alternatif Penyelesaian:
Pertama sekali, kita harus mencari ruang sampel dan kejadian yang diharapkan muncul. Perhatikan Tabel berikut.

Tabel 5. Pasangan dua koin dan satu dadu.

Dua Buah Koin	**Mata Dadu**						
	pasangan	1	2	3	4	5	6
	AA	AA1	AA2	AA3	AA4	AA5	AA6
	AG	AG1	AG2	AG3	AG4	AG5	AG6
	GA	GA1	GA2	GA3	GA4	GA5	GA6
	GG	GG1	**GG2**	**GG3**	GG4	**GG5**	GG6

Dari tabel di atas, dapat ditentukan banyak ruang sampel $n(S) = 24$. *E* adalah muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut sehingga $E = \{GG2, GG3, GG5\}$ atau $n(E) = 3$ sehingga peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut adalah

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

G. Masalah dan Solusi dalam Pembelajaran

1. Permasalahan:
   a. Siswa sering kesulitan dan bingung dalam mengaplikasikan rumus terhadap suatu pertanyaan.
   b. Banyak siswa yang masih kebingungan dalam mencerna soal atau pertanyaan sehingga sering salah dalam menyelesaikan permasalahan peluang.
   c. Siswa sering terbalik dalam mengaplikasikan rumus permutasi dengan kombinasi.
   d. Siswa sering lupa dalam mengaplikasikan rumus sehingga jawaban atau rumus yang digunakan tidak sesuai.
   e. Banyaknya sub materi dalam peluang, tidak sedikit siswa yang masih bingung dalam memahami per sub materi.
2. Solusi:
   a. Pendidik sebaiknya memberikan siswa lebih banyak lagi sebuah contoh-contoh yang nyata agar siswa paham dan mampu mengaplikasikan rumus secara tepat.
   b. Siswa diarahkan kembali mengenai sebuah penyelesaian pada model soal yang berbeda-beda agar lebih banyak pengalaman siswa dalam menyelesaikan permasalahan, sehingga mampu mendorong siswa untuk paham dalam mencerna soal.
   c. Siswa sebaiknya lebih ditekankan kembali mengenai definisi dari permutasi dan combinasi itu sendiri. Sehingga siswa mampu menggunakan secara tepat agar tidak terjadi keterbalikan penggunaan rumus.
   d. Siswa lebih didorong lagi dengan cara ditekankan dalam pemahaman konsep sehingga mampu mengingat suatu pemahaman yang ia alami dan rumus akan dengan mudah ia ingat kembali.
   e. Sebaiknya siswa dijelaskan per sub materi dan diberikan tes dalam setiap pembelajaran sub materi agar dapat mengetahui siswa yang tertinggal sehingga dapat diulas kembali dan lebih ditekankan.

Latihan Soal

1. Berapa banyaknya permutasi dari huruf-huruf pada kata berikut!
   a. J A K A R T A
   b. C U R I C U L U M
2. Di depan sebuah gedung pertemuan akan dipasang berjajar bendera-bendera Negara peserta yang hadir. Jika terdapat 1 bendera Indonesia, 3 bendera Malaysia, 4 bendera Filipina, dan 1 bendera Australia. Berapa banyak susunan bendera yang bias terjadi?
3. Berapa banyaknya uang yang berbeda yang dapat diambil dari sebuah dompet berisi uang kertas dari 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000, dan 20.000 rupiah masing-masing satu buah?
4. Tentukan banyak ruang sampel pada kasus berikut
   a. Jika sebuah dadu dan sebuah mata koin dilemparkan secara bersamaan. Dengan menggunakan diagram pohon tentukan ruang sampel percobaan tersebut?

b. Dari angka - angka 1, 2, 3, dan 4 akan dibentuk bilangan dengan 3 angka dan tidak boleh ada angka yang diulang.
c. Kota B dapat dituju ke kota B dengan menggunakan 4 jenis bus angkutan umum,sementara dari kota B ke kota C dapat dituju dengan 5 jenis bus angkutan umum. Jika kota B adalah kota satu-satunya penghubung kota A dengan kota C maka tentukan pasangan bus yang dapat dipilih seseorang untuk bepergian dari kota A ke kota C.

5. Tiga buah koin setimbang ditoss bersama dengan sebuah dadu setimbang sisi enam. Tentukan peluang kejadian berikut:
   a. Peluang munculnya 2 angka dan bilangan genap.
   b. Peluang munculnya paling sedikit 2 angka dan bilangan kurang dari 5.
   c. Peluang munculnya banyaknya angka selalu lebih banyak dengan munculnya gambar dan bilangan faktor 6.
6. Dalam satu set kartu bridge, terambilnya kartu bernomor kurang dari 6 adalah
7. Pada pelemparan dua buah dadu masing-masing berwarna biru dan hitam secara bersama-sama. Jika A adalah kejadian munculnya mata uang dadu berjumlah 5 dan B adalah kejadian munculnya mata dadu berjumlah 10. Hitunglah peluang kejadian A atau B.
8. Dalam suatu kelas yang terdiri atas 40 siswa, terdapat 11 anak hobi bermain voli, 15 anak hobi bermain basket, dan 5 anak hobi bermain voli dan basket. Jika dipilih dua murid untuk suatu kompetisi olahraga, peluang yang terpilih anak yang hobi bermain voli atau basket adalah
9. Dalam sebuah kotak terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng biru. Jika diambil dua kelereng berturut-turut tanpa pengembalian, maka probabilitasnya agar kelereng yang diambil pertama biru dan kedua juga biru adalah
10. Dari sebuah kotak berisi 4 bola hitam dan 6 bola putih diambil 3 bola sekaligus secara acak. Berapa peluang bahwa yang terambil paling sedikit satu bola putih?

DAFTAR PUSTAKA

Budhayanti, Clara Ika Sari, dkk. 2008. *Pemecahan Masalah Matematika*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan dan Dempartemen Pendidikan Nasional.

Buku Guru Matematika. 2014. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Depdiknas Dirjen Pendidikan Dasar dan Menengah Pusat Pengembangan Penataran GurU (PPPG) Matematika.2004. *Geometri Ruang.* Yogyakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Kariadinata, Rahayu. 2013. *Trigonometri Dasar.* Bandung: Pustaka Setia

Kusna, Asmaatul dan Kasmina. 2012. *Seri Pendalaman Materi Matematika SMK dan MAK Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian*. Jakarta: Erlangga.

Marwanta, dkk. 2007. *Matematika Interaktif*. Bogor: Yudhistira.

Menteri pendidikan dan kebudayaan. 2014. *Buku Matematika pegangan siswa.* Jakarta:Menteri pendidikan dan kebudayaan.

Muhsetyo, Gatot, dkk. 2007. *Pembelajaran matematika SD.*Jakarta : Universitas Terbuka.

P. Abbott. 1986. *Geometry*. Great Britain: Hodder and Stoughton Limited.

Sinaga, Bornok dkk. 2014. *Buku Guru Matematika: Edisi Revisi 2014*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Sukardi. 2018. *" Soal dan Pembahasan Persamaan Kuadrat "*, (*Online*), https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-persamaan-kuadrat/, diakses pada 12 September 2019.

Supatmono, Catur dan Sriyanto. 2011. *Matematika Kontekstual*. Klaten: PT Intan Pariwara.

Tim Studi Guru. 2012. *Jurus Jitu Lulus UN SMA/MA IPA 2013*. Jakarta: KAWAHmedia.

Untung Trisna Suwaji.2008.*Permasalahan Pembelajaran Geometri Ruang SMP dan alternative Pemecahannya.*Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Wirdiatmi,dkk. *Matematika untuk SMA Kelas 2 IPA 2.* Bekasi: PT Galaksi Puspa Mega (Anggota IKAPI).

Wirodikromo, sartono. 2002. *Matematika Untuk SMA*.Jakarta: Erlangga.

___________________. 2006. *Matematika SMA Kelas XI Program Ilmu Alam*. Jakarta: Erlanga.

Zuhair. 2009. *Modul Pembelajaran Matematika Dasar: Sistem Bilangan (1)*. Diunduh di http://kk.mercubuana.ac.id/elearning/files_modul/92009-1-341618793791.pdf. pada Rabu, 15/09/2015 pukul 22:45

PEMETAAN STANDAR KOMPETENSI LULUSAN
MATA PELAJARAN MATEMATIKA WAJIB

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
Pengetahuan Memiliki pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif dalam ilmu pengetahuan, teknologi, seni, dan budaya dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab serta dampak fenomena dan kejadian **Keterampilan** Memiliki kemampuan pikir dan tindak yang efektif dan kreatif dalam ranah abstrak dan konkret sebagai	3. Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat	3.1. Mengintepretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.	3.1.1. Mendefinisikan tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.2. Mengidentifikasikan tentang hubungan antara jarak dengan harga mutlak 3.1.3. Mendeskripsikan tentang pengertian konsep harga mutlak, 3.1.4. Mengklasifikasikan tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.5. Menemukan data dan informasi tentang persamaan dan kesamaan 3.1.6. Mengeksprolasi temuan data dan informasi tentang sifat-sifat atau teorema-teorema harga mutlak 3.1.7. Mentabulasikan hasil eksprolasi data dan informasi tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.8. Menganalisis tabulasi data dan informasi tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.9. Menguraikan hasil analisa data dan informasi tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.10. Mengasosiasikan uraian data dan informasi tentang	Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak - Pengertian persamaan dan pertidaksamaan linear satu variable - Penerapan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel	• Mengidentifikasi kuantitas-kuantitas dan hubungan di antaranya dalam masalah kontekstual dan merumuskan persamaan dan/atau pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak yang sesuai. • Menggunakan ide-ide matematika untuk menyelesaikan persamaan dan/atau pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak. • Menafsirkan dan mengevaluasi penyelesaian berdasarkan konteks mula-mula. • Mengomunikasikan proses dan hasil pemecahan masalah • Menyelesaikan masalah yang	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
pengembangan dari yang dipelajari di sekolah secara mandiri.	dan minatnya untuk memecahkan masalah 4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan		persamaan dengan harga mutlak 3.1.11. Menyimpulkan hasil asosiasi data dan informasi tentang persamaan dengan harga mutlak 3.1.12. Mendefinisikan tentang pengertian konsep dasar pertidaksamaan, 3.1.13. Mengidentifikasikan tentang sifat-sifat pertidaksamaan 3.1.14. Mendeskripsikan tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.15. Mengklasifikasikan tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.16. Menemukan data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.17. Mengeksprolasi temuan data dan informasi tentang sifat-sifat pertidaksamaan harga mutlak 3.1.18. Mentabulasikan hasil eksprolasi data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.19. Menganalisis tabulasi data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.20. Menguraikan hasil analisa data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak.		berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak • Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			3.1.21. Mengasosiasikan uraian data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak. 3.1.22. Menyimpulkan hasil asosiasi data dan informasi tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak.			
		4.1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variable	4.1.1. Memverifikasi kesimpulan data dan informasi tentang penerapannya dalam menyelesaikan persamaan dengan satu dan dua harga mutlak 4.1.2. Mempresentasikan hasil verifikasi data tentang persamaan dengan harga mutlak 4.1.3. Memverifikasi kesimpulan data dan informasi tentang penyelesaian pertidaksamaan harga mutlak 4.1.4. Mempresentasikan hasil verifikasi data tentang pertidaksamaan dengan harga mutlak.			
		3.2. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel	3.2.1. Mendefinisikan tentang konsep pecahan 3.2.2. Mengidentifikasikan tentang bentuk pertidaksamaanpecahan 3.2.3. Mengklasifikasikan tentang sifat-sifat pertidaksamaan pecahan 3.2.4. Mendeskripsikan tentang konsep himpunan	Pertidaksamaan mutlak, pecahan, dan irrasional	• Mencermati pengertian, metode penyelesaian pertidaksamaan dan nilai mutlak, pertidaksamaan pecahan,irrasional dan mutlak, dan penerapannya pada	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			penyelesaian pertidaksamaan pecahan 3.2.5. Mengeksprolasi konsep penyelesaian pertidaksamaan pecahan 3.2.6. Mengidentifikasikan tentang konsep bilangan irrasional 3.2.7. Mendeskripsikan tentang bentuk pertidaksamaan irrasional 3.2.8. Mengidentifikasikan tentang himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional 3.2.9. Menemukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional 3.2.10. Mengidentifikasikan tentang konsep nilai mutlak 3.2.11. Mendeskripsikan tentang bentuk pertidaksamaan nilai mutlak 3.2.12. Mengidentifikasikan tentang himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak 3.2.13. Menemukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak 3.2.14. Mendeskripsikan tentang bentuk pertidaksamaan nilai mutlak		masalah nyata dari berbagai sumber belajar • Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan mutlak, pecahan, dan irrasional • Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan mutlak, pecahan, dan irrasional	
		4.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel	4.2.1. Menggunakan konsep pecahan dalam memecahkan masalah nyata 4.2.2. Menggunakan bentuk dan sifat-sifat pertidaksamaan pecahan dalam memecahkan masalah nyata			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			4.2.3. Memecahkan masalah matematis menggunakan kertas undian dengan memahami konsep penyelesaian pertidaksamaan pecahan 4.2.4. Menerapkan konsep himpunan penyelesaian pertidaksamaan pecahan dalam kehidupan sehari-hari 4.2.5. Menyelesaikan masalah matematis menggunakan konsep bilangan irrasional 4.2.6. Menyelesaikan masalah matematis dengan menggunakan bentuk-bentuk pertidaksamaan irrasional 4.2.7. Menyelesaikan masalah matematis dengan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional 4.2.8. Menggunakan media kartu bridge dalam menyelesaikan masalah matematis dengan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional 4.2.9. Menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari dengan menggunakan dengan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irrasional 4.2.10. Memecahkan masalah matematis dengan menggunakan konsep nilai mutlak 4.2.11. Memecahkan masalah matematis dengan			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			menggunakan bentuk-bentuk pertidaksamaan nilai mutlak 4.2.12. Menyelesaikan masalah matematis dengan menggunakan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak 4.2.13. Menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari dengan menggunakan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak			
		3.3. Menyusun sistem persamaan linear tiga variabel dari masalah kontekstual	3.3.1. Menyebut mengenai ekspresi sistem persamaan tiga variable metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi 3.3.2. Menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi, metode gabungan, dan metode determinasi 3.3.3. Menerapkan SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan 3.3.4. Membedakan konsep sistem persamaan tiga variabel metode substitusi, metode gabungan, dan metode	Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel - Pengertian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel - Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	• Mengidentifikasi kuantitas-kuantitas dan hubungan di antaranya dalam masalah kontekstual dan merumuskan sistem persamaan linear tiga variabel yang sesuai. • Menggunakan ide-ide matematika untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel. • Menafsirkan dan mengevaluasi penyelesaian berdasarkan konteks mula-mula. • Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			determinasi dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam penyelesaian masalah matematika 3.3.5. Merancang, model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi 3.3.6. Menafsirkan ciri-ciri SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi dari model matematika		sistem persamaan linear tiga variabel • Mengomunikasikan proses dan hasil pemecahan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel	
		4.3. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variable	4.3.1. Menyesuaikan SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan 4.3.2. Memilah dari unsur-unsur yang terdapat pada ekspresi sistem persamaan tiga variable metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi dan cara menentukan himpunan penyelesaiannya			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			4.3.3. Menggantikan konsep SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri 4.3.4. Membentuk sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLTVetode msubstitusi, metode gabungan, dan metode determinasi 4.3.5. Menyesuaikan model matematika berupa SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya 4.3.6. Mengoreksi hasil penyelesaian masalah yang diberikan dari SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi 4.3.7. Menggantikan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPLTV metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi 4.3.8. Membentuk model matematika untuk			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			memperoleh solusi permasalahan yang diberikan dengan metode substitusi, metode gabungan, dan metode determinasi			
		3.4. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)	3.4.1. Menyebut mengenai ekspresi sistem pertidaksamaan linier dua variable 3.4.2. Menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPtLDV 3.4.3. Menerapkan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan 3.4.4. Membedakan konsep sistem pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam penyelesaian masalah matematika 3.4.5. Merancang, model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPtLDV 3.4.6. Menafsirkan ciri-ciri SPtLDV dari model matematika	Sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)	• Mencermati pengertian, metode penyelesaian, kurva persamaan dalam sistem pertidaksamaan kuadrat dua variabel, dan penerapannya pada masalah nyata dari berbagai sumber belajar. • Merumuskan secara aljabar maupun manipulasi matematika lainnya tentang sifat-sifat yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan kuadrat dengan dua variabel • Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat) • Menyajikan pelesaian masalah yang	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			3.4.7. Memahami Konsep Pertidaksamaan Kuadrat 3.4.8. Membedakan bentuk pertidaksamaan kuadat dengan bentuk pertidaksamaan lain 3.4.9. Mentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat 3.4.10. Menganalisis pertidaksamaan kuadrat dan mengevaluasi himpunan penyelesaian yang didapatkan 3.4.11. Menerapkan konsep pertidaksamaan untuk menentukan himpunan penyelesaiannya 3.4.12. Mendeskripsikan sistem pertidaksamaan kuadrat; 3.4.13. Mengeksplorasi penyelesaian sistem pertidaksamaan kuadrat dalam permasalahan matematis 3.4.14. Menganalisis penyelesaian sistem pertidaksamaan kuadrat dalam permasalahan matematis 3.4.15. Menerapkan konsep sistem pertidaksamaan kuadrat 3.4.16. Menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan kuadrat 3.4.17. Mengasosiasikan konsep sistem pertidaksamaan kuadrat		berkaitan dengan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			3.4.18. Menemukan himpunan penyelesaian dari sistem yang diberikan 3.4.19. Menerapkan sistem pertidaksamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari 3.4.20. Menemukan penerapan sistem pertidaksamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari			
		4.4. Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat	4.4.1. Menyesuaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan 4.4.2. Memilah dari unsur-unsur yang terdapat pada ekspresi sistem pertidaksamaan linier dua variabel, cara menentukan himpunan penyelesaiannya 4.4.3. Menggantikan konsep SPtLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri 4.4.4. Membentuk sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPtLDV 4.4.5. Menyesuaikan model matematika berupa SPtLDV dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			4.4.6. Mengoreksi hasil penyelesaian masalah yang diberikan 4.4.7. Menggantikan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPtLDV 4.4.8. Membentuk model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan 4.4.9. Menerapakan konsep pertidaksamaan kuadrat dalam menyelesaiakan masalah matematis 4.4.10. Memecahkan permasalahan nyata yang berhubungan dengan pertidaksamaan kuadrat 4.4.11. Menyelesaikan sistem pertidaksamaan kuadrat dalam permasalahan matematis 4.4.12. Menyelesaikan system pertidaksamaan kuadrat dengan menentukan himpunan penyelesaiannya 4.4.13. Menyeledsaikan system pertidaksamaan kuadrat dengan menemukan himpunan penyelesaiannya 4.4.14. Menyelesaikan permasalahan sistem pertidaksamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
		3.5. Menjelaskan dan menentukan fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) secara formal yang meliputi notasi, daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik, serta sketsa grafiknya	3.5.1. Mendefinisikan pengertian produk cartesius 3.5.2. Mendeskripsikan relasi 3.5.3. Mendeskripsikan domain 3.5.4. Mendeskripsikan kodomain 3.5.5. Mendeskripsikan rnge 3.5.6. Mendeskripsikan fungsi atau pemetaan 3.5.7. Mengeksplore tentang komposisi fungsi 3.5.8. Mengasosiasikan sifat komposisi fungsi	Fungsi - Relasi dan Fungsi - Operasi Aritmetika - Komposisi Fungsi - Fungsi Linear - Fungsi Kuadrat - Fungsi Rasional - Fungsi Invers	• Mengidentifikasi hubungan antara daerah asal, daerah hasil suatu fungsi dan ekspresi simbolik yang mendefinisikannya serta mendiskusikan hubungan yang teridentifikasi dengan menggunakan berbagai representasi bersama temannya. • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan masalah kontektual yang dinyatakan dengan fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan	
		4.5. Menganalisa karakteristik masing – masing grafik (titik potong dengan sumbu, titik puncak, asimtot) dan perubahan grafik fungsinya akibat transformasi $f^2(x)$, $1/f(x)$, $\|f(x)\|$ dsb	4.5.1. Menyajikan relasi dengan diagram panah 4.5.2. Menyajikan relasi dengan himpunan pasangan berurutan 4.5.3. Menyajikan relasi dengan diagram pada bidang cartesius 4.5.4. Menyajikan fungsi dalam grafik fungsi 4.5.5. Menyajikan fungsi dalam daerah hasil fungsi			
		3.6. Menjelaskan operasi komposisi pada fungsi dan operasi invers pada fungsi invers serta sifat-sifatnya serta menentukan eksistensinya	3.6.1. Menentukan syarat-syarat sebuah fungsi 3.6.2. Menentukan daerah asal, daerah lawan, dan daerah hasil suatu fungsi 3.6.3. Menyebutkan fungsi-fungsi ditinjau dari daerah kawan fungsi 3.6.4. Menyebutkan sifat-sifat fungsi ditinjau dari simetrisitas fungsi			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			3.6.5. Menafsirkan nilai variabel yang digunakan untuk memecahkan masalah dari data yang tersedia 3.6.6. Menerapkan aturan operasi dua fungsi atau lebih dalam mengolah data masalah nyata 3.6.7. Menentukan aturan dalam operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian fungsi 3.6.8. Menentukan syarat dan aturan fungsi yang dapat dikomposisikan 3.6.9. Menentukan fungsi komposisi dari beberapa fungsi 3.6.10. Menyebutkan sifat-sifat komposisi fungsi 3.6.11. Menentukan komponen pembentuk fungsi dan komponen lainnya diketahui 3.6.12. Menjelaskan syarat agar suatu fungsi mempunyai invers 3.6.13. Menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya 3.6.14. Mengidentifikasi sifat-sifat fungsi invers 3.6.15. Merancang masalah dunia nyata yang berkaitan dengan komposisi fungsi 3.6.16. Mengajukan masalah dunia nyata yang berkaitan dengan komposisi fungsi		prosedur untuk melakukan operasi aritmetika pada fungsi (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) dan operasi komposisi pada fungsi • Mengamati dan mengidentifikasi fakta pada fungsi invers yang akan digunakan untuk menentukan eksistensinya • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi invers suatu fungsi • Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan fungsi	
		4.6. Menyelesaikan masalah yang	4.6.1. Menyajikan fungsi dalam berbagai bentuk			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
		berkaitan dengan operasi komposisi dan operasi invers suatu fungsi	4.6.2. Menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata terkait fungsi invers dan invers fungsi dengan memilih strategi yang efektif 4.6.3. Menyajikan penerapan berbagai aturan dalam menyelesaikan masalah dunia nyata yang berkaitan dengan komposisi fungsi			
		3.7. Menjelaskan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku	3.7.1. Menyebutkan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku melalui penyelidikan 3.7.2. Menjelaskan hasil penyelidikan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku 3.7.3. Mengaitkan konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dengan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dalam beberapa segitiga siku- siku sebangun. 3.7.4. Mengidentifikasikan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.5. Membedakan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.6. Menyesuaikan sifat-sifat dan hubungan antar	Trigonometri - Pengukuran Sudut - Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku - Sudut-sudut Berelasi - Identitas Trigonometri - Aturan Sinus dan Cosinus - Fungsi Trigonometri	• Mangamati dan mengidentifikasi fakta pada radian dan derajat sebagai satuan pengukuran sudut, serta hubungannya • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran sudut dalam satuan radian atau derajat • Mangamati dan mengidentifikasi fakta pada rasio trigonometri (sinus,	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.7. Mengkorelasikan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.8. Menghubungkan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.9. Membandingkan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku- siku. 3.7.10. Mendeskripsikan ukuran sudut pada segitiga siku-siku 3.7.11. Mengekplorasi konversi sudut pada segitiga siku-siku 3.7.12. Melakukan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku 3.7.13. Mengubah ukuran sudut sesuai ketentuan (derajat ke radian dan sebaliknya) 3.7.14. Menemukan perbandingan sinus, cosinus, tangen, cosinus, secan dan cotangen 3.7.15. Menggunakan konsep kesebangunan		cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku. • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan denganrasio trigonometri pada segitiga siku-siku • Mencermati dan mengidentifikasi fakta pada rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi kemudian membuat generalisasinya • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk	
		4.7. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan	4.7.1. Menyatakan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah 4.7.2. Menjelaskan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
		cotangen) pada segitiga siku-siku	4.7.3. Menentukan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah 4.7.4. Memilih perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah 4.7.5. Menyusun perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah 4.7.6. Menggunakan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah 4.7.7. Menyajikan penggunaan konsep kesebangunan untuk menemukan perbandingan sinus, cosinus, tangen, cosinus, secan dan cotangen 4.7.8. Menyajikan penggunaan konsep kesebangunan untuk mengubah ukuran sudut sesuai ketentuan (derajat ke radian dan sebaliknya)		menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi • Mengamati dan mengidentifikasi hubungan antara rasio trigonometri yang membentuk identitas dasar trigonometri. • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur pembuktian identitas trigonometri	
		3.8. Menggeneralisasi rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi	3.8.1. Menyebutkan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika 3.8.2. Menjelaskan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika		• Mengamati dan mengidentifikasi fakta pada aturan sinus dan cosinus serta masalah yang terkait • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			3.8.3. Mengklasifikasikan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika 3.8.4. Mengaitkan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika 3.8.5. Menganimasikan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika 3.8.6. Memproyeksikan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika 3.8.7. Menemukan perbandingan dan nilai perbandingan trigonometri dalam sudut istimewa 3.8.8. Menemukan hubungan nilai fungsi trigonometri dikuadran II,III dan IV dengan perbandingan trigonometri dikuadran I		masalah yang berkaitan dengan aturan sinus dan kosinus. • Mencermati dan mengidentifikasi fakta pada grafik fungsi yang dibuat dengan menggunakan lingkaran satuan • Mengumpulkan dan mengolah informasi untuk membuat kesimpulan, serta menggunakan prosedur untuk untuk membuat seksa grafik fungsi trigonometri • Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan trigonometri	

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
		4.8. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi	4.8.1. Menyajikan penggunaan hubungan nilai fungsi trigonometri dikuadran II,III dan IV dengan perbandingan trigonometri dikuadran I untuk menentukan nilai suatu sudut			
		3.9. Menjelaskan aturan sinus dan cosinus	3.9.1. Mendeskripsikan konsep himpunan penyelesaian persamaan sinus 3.9.2. Menemukan himpunan penyelesaian persamaan sinus 3.9.3. Mendeskripsikan konsep persamnaan kosinus 3.9.4. Menemukan himpunan penyelesaian persamaan kosinus 3.9.5. Mendeskripsikan konsep persamaan tangen 3.9.6. Menemukan himpunan penyelesaian persamaan tangen 3.9.7. Merumuskan model matematika dari permasalahan dalam kehidupan sehari-hari menjadi bentuk persamaan trigonometri a cos x + b sin x = c 3.9.8. Menganalisis identitas trigonometri 3.9.9. Menemukan himpunan penyelesaian persamaan			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			berbentuk a cos x + b sin x = c dalam masalah matematis 3.9.10. Menyusun identitas trigonometri baru yang valid nilai kebenarannya 3.9.11. Menemukan identitas trigonometri yang lain dari hasil pencarian di perpustakaan daerah, serta dapat membuktikan kebenarannya			
		4.9. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan sinus dan cosinus	4.9.1. Menyelesaikan masalah matematis dengan menggunakan konsep himpunan penyelesaian persamaan sinus 4.9.2. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan himpunan penyelesaian persamaan sinus 4.9.3. Menyelesaikan masalah matematis dengan menggunakan konsep persamnaan kosinus 4.9.4. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan himpunan penyelesaian persamaan kosinus 4.9.5. Menyelesaikan masalah matematis dengan menggunakan konsep persamnaan tangen 4.9.6. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan himpunan			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			penyelesaian persamaan tangen 4.9.7. Membuktikan kebenaran suatu identitas trigonometri dengan menganalisis identitas trigonometri tersebut 4.9.8. Menyajikan identitas trigonometri			
		3.10. Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan	3.10.1. Menyebutkan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi y = cos x dan grafik fungsi y = tan x 3.10.2. Menjelaskan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi y = cos x dan grafik fungsi y = tan x 3.10.3. Mengklasifikasikan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
			y = cos x dan grafik fungsi y = tan x 3.10.4. Mengaitkan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi y = cos x dan grafik fungsi y = tan x 3.10.5. Menganimasikan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi y = cos x dan grafik fungsi y = tan x 3.10.6. Memproyeksikan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa.perbandingan trigonometri sudut-dan sudut istimewa dan grafik fungsi y = sin x, grafik fungsi y = cos x dan grafik fungsi y = tan x			
		4.10. Menganalisa perubahan grafik fungsi	4.10.1. Menyatakan grafik fungsi trigonometri			

SKL	KI	KD	IPK	MATERI PEMBELAJARAN	KEGIATAN PEMBELAJARAN	RENCANA PENILAIAN
		trigonometri akibat perubahan pada konstanta pada fungsi y = a sin b(x + c) + d.	4.10.2. Menggambarkan grafik fungsi trigonometri 4.10.3. Menganimasikan grafik fungsi trigonometri 4.10.4. Merancang grafik fungsi trigonometri 4.10.5. Menyusun grafik fungsi trigonometri 4.10.6. Memproyeksikan grafik fungsi trigonometri			

REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN

CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201988834, 12 Desember 2019
Pencipta		
Nama	:	**Bintang Wicaksono dan Nendra Mursetya Somasih Dwipa**
Alamat	:	Jl. Ir. Sutami Nomor 82c Pucang Sawit, Jebres, Surakarta, Surakarta, JAWA TENGAH, 57125
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Bintang Wicaksono dan Nendra Mursetya Somasih Dwipa**
Alamat	:	Jl. Ir. Sutami Nomor 82c Pucang Sawit, Jebres, Surakarta, Surakarta, JAWA TENGAH, 75125
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Modul**
Judul Ciptaan	:	**Modul Matematika SMA 1 Berbasis Pedagogical Content Knowledge**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	12 Desember 2019, di Yogyakarta
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000170278

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

Disclaimer:
Dalam hal pemohon memberikan keterangan tidak sesuai dengan surat pernyataan, Menteri berwenang untuk mencabut surat pencatatan permohonan.