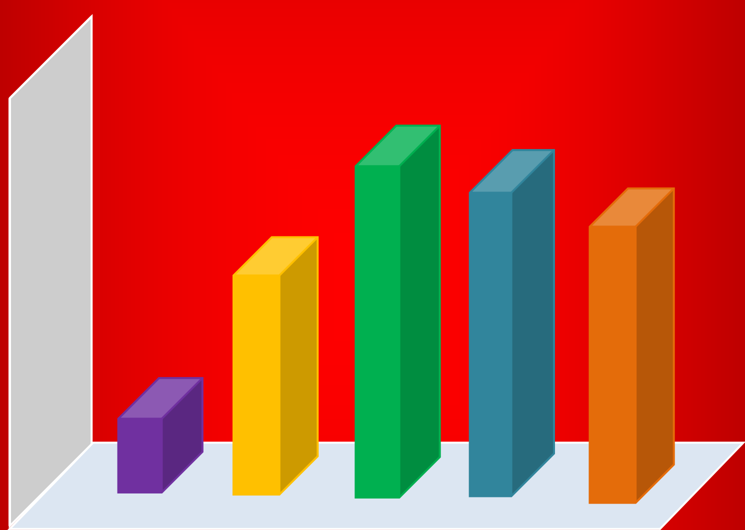
ISBN: 978-602-53881-3-2

TEKNIK ANALISIS KORELASI DAN REGRESI ILMU-ILMU PERTANIAN



Dr. Ir. Paiman, MP.

Penerbit
@ 2019 UPY Press

Teknik Analisis Korelasi dan Regresi Ilmu-Ilmu Pertanian

Dr. Ir. Paiman, M.P. adalah dosen tetap Prodi Agroteknologi Fakultas Pertanian Universitas PGRI Yogyakarta (UPY). Pendidikan Sarjana (S-1) Jurusan Budidaya Pertanian diselesaikan di Institut Pertanian "STIPER" Yogyakarta pada tahun 1991. Pendidikan Magister (S-2) Program Studi Agronomi diselesaikan di Pascasarjana Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 1994. Pendidikan Program Doktor (S-3) Program Studi Ilmu-ilmu Pertanian minat ilmu gulma diselesaikan di Pascasarjana Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 2014.

Pernah menjabat sebagai Kaprodi Agronomi Fakultas Pertanian UPY pada tahun 1997-2001 dan sebagai Wakil Dekan Fakultas Pertanian UPY pada tahun 2001-2005. Pernah menjabat sebagai Dekan Fakultas Pertanian UPY pada tahun 2005-2009. Pernah menjabat Wakil Dekan periode tahun 2009-2013 dan dilanjutkan periode tahun 2013-2017. Pada tahun 2013-2017 juga menjabat sebagai Sekretaris Yayasan Pembina Universitas PGRI Yogyakarta (YP-UPY). Periode tahun 2017-2021 menjabat sebagai Rektor UPY.

Buku/monograp yang telah diterbitkan dan ber-ISBN:

1. Perancangan Percobaan untuk Pertanian
2. Solarisasi Tanah Pra-Tanam(ST-PT): Teknologi Pengendalian Organisme Pengganggu Tanaman (OPT) Tanpa Pestisida.
3. Teknik Analisis Korelasi dan Regresi Ilmu-Ilmu Pertanian

Dr. Ir. Paiman, M.P.

TEKNIK
ANALISIS KORELASI DAN REGRESI
ILMU-ILMU PERTANIAN

Penerbit
UPY Press

Perpustakaan Nasional RI: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Penulis:
Dr. Ir. Paiman, MP.

Teknik Analisis Korelasi dan Regresi Ilmu-Imu Pertanian

vi + 216 hal, 18 cm x 23 cm

ISBN: 978-602-53881-3-2

Editor:
Nedra Nursetya Somasih Dwipa, M.Pd.

Penyunting:
Muhammad Fairuzabadi, M.Kom

Desain Sampul dan Tata Letak:
Nurirwan, M.Eng.

Penerbit:
UPY Press

Alamat Redaksi:
Jl. PGRI I Sonosewu No. 117, Yogyakarta
Telp (0274) 376808, 373198, 418077 Fax. (02740) 376808
Email: upypress@gmail.com
http://www.upy.ac.id

Cetakan pertama, Juni 2019

Hak cipta dilindungi oleh Undang-Undang
Dilarang memperbanyak karya tulisan ini tanpa izin tertulis dari Penerbit.

KATA PENGANTAR

Penulis panjatkan puji syukur kehadlirat Allah SWT yang telah memberikan raahmat, hidayah serta inayahnya hingga terwujudnya pikiran penulis dapat termuat dalam buku ini.

Statistik dipandang sebagai momok dan tidak disukai oleh banyak mahasiswa dengan alasan sangat sulit dipelajari dan dipahami. Atas dasar alasan itu, penulis terpanggil untuk menulis buku ini yang disajikan lebih sederhana disertai contoh-contoh. Buku statistik ini berjudul **"TEKNIK ANALISIS KORELASI DAN REGRESI ILMU-ILMU PERTANIAN"** yang terdiri atas 4 Bab yaitu: (1) Korelasi dan regresi linier sederhana, (2) Korelasi dan regresi linier berganda, (3) Regresi polynomial, dan (4) Regresi non linier. Isi buku ini cukup lengkap disertai teknik analisis data hingga cara pengambilan kesimpulan, sehingga dapat memandu para pembaca. Juga dilengkapi dengan gambar-gambar korelasi atau kurva regresi yang mudah untuk dipahami. Statistik yang tadinya dianggap sulit oleh banyak orang, selanjutnya akan dianggap lebih mudah dan disenangi oleh banyak orang yang ingin mempelajarinya.

Buku ini semoga dapat dimanfaatkan sebagai acuan belajar bagi para mahasiswa, pengajar dan peneliti dalam menyelesaian persoalan yang berhubungan dengan statistik khususnya tenyang korelasi dan regresi. Penulis menyadari bahwa isi dalam buku ini masih banyak kekurangannya. Oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari pembaca yang selalu penulis tunggu dalam rangka perbaikan sehingga materi yang termuat sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini dan ke depan.

Yogyakarta, Juni 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

JUDUL ………………………………………………………………………		i
KATA PENGANTAR ……………………………………………………...		ii
DAFTAR ISI …………………………………………………………….…...		iii
DAFTAR LAMPIRAN ………………………....…………………………..		vi
BAB 1.	**KORELASI DAN REGRESI LINIER SEDERHANA** …………	**1**
	1.1. Korelasi Linier Sederhana ……………………..……...	1
	1.1.1. Pendahuluan …………………………………………...	1
	1.1.2. Pengertian korelasi dan kegunaannya ……..….	2
	1.1.3. Korelasi linier sederhana ……………………..…..	8
	1.1.4. Pengujian korelasi …………………………….…..	9
	1.1.5. Korelasi untuk data berkelompok ………….....	15
	1.1.6. Korelasi untuk data rank …………………………	17
	1.1.7. Korelasi untuk data kualitatif …………………....	26
	1.2. Regresi Linier Sederhana ……………………...……...	31
	1.2.1. Pengertian regresi sederhana ……………….…….	31
	1.2.2. Diagram pencar/tebar ……………………………...	31
	1.2.3. Teori jumlah kuadrat ……….……..…………….....	36
	1.2.4. Uji terhadap koefisien regresi linier sederhana ……………………………...……………………	44
BAB 2.	**KORELASI DAN REGRESI LINIER BERGANDA** ……….….	**63**
	2.1. Korelasi Linier Berganda ………...……………………..	63
	2.1.1. Pendahuluan ………………………………………....	63
	2.1.2. Korelasi linier sederhana, parsial, dan berganda ……………………………………………………...	66
	2.2. Regresi Linier Berganda ………...……………..……..	74
	2.2.1. Model umum regresi linier berganda …………....	74
	2.2.2. Metode jumlah kuadrat terkecil …………………..	76
	2.2.3. Uji terhadap koefisien regresi berganda ……....	78

BAB 3. REGRESI POLINOMIAL **97**
3.1. Pendahuluan 97
3.2. Regresi Polinomial 98
3.2.1. Model linier 99
3.2.2. Model kuadratik 102
3.2.3. Model kubik 106
3.2.4. Model kuartik 107
3.2.5. Model kuintik 109
3.3. Penentuan Ketepatan Model Regresi 111
3.3.1. Koefisien determinasi 111
3.3.2. Analisis ragam 112
3.4. Contoh Perhitungan 116
3.4.1. Penentuan model dengan koefisien determisi 118
3.4.2. Penentuan model dengan analisis varian 129

BAB 4. REGRESI NON LINIER **135**
4.1. Pendahuluan 135
4.2. Trend Eksponensial (Perpangkatan) 136
4.2.1. Fungsi $Y = ab^X$ 136
4.2.2. Fungsi $Y = aX^b$ 153
4.2.3. Fungsi $e^Y = aX^b$ 171
4.2.4. Fungsi $Y = \frac{k}{10^{a+bX}+1}$ 173
4.2.5. Fungsi $Y = k + ab^X$ 183
4.2.6. Fungsi $Y = ae^{bX}$ 185
4.3. Trend Sigmoid 189
4.3.1. Fungsi $Y = e^{a+bX}$ 189
4.3.2. Fungsi $Y = e^{a+\frac{b_1}{X}+\frac{b_2}{X^2}}$ 196
DAFTAR PUSTAKA 209
DAFTAR LAMPIRAN 210

DAFTAR LAMPIRAN

		Halaman
Lampiran 1.	Tabel korelasi …………………………………………....	210
Lampiran 2.	Distribusi t pada α% untuk uji 1 dan 2 ekor	211
Lampiran 3.	Distribusi X^2 pada α% ………………………………..	212
Lampiran 4.	Koefisien orthogonal polinomial untuk interval perlakuan sama …………………………………....	214
Lampiran 5.	Distribusi F pada α = 5% dan 1% ………………..	215

BAB 1

KORELASI DAN REGRESI LINIER SEDERHANA

1.1. Korelasi Linier Sederhana

1.1.1. Pendahuluan

Suatu kejadian pasti ada penyebabnya. Semua kejadian baik kejadian yang terjadi di bidang politik, ekonomi, sosial, pertanian, dan lain-lain, pasti ada faktor penyebab yang menyebabkan terjadinya kejadian-kejadian tersebut. Contoh: Terjadinya awan karena ada penyinaran dari matahari ke bumi baik di darat maupun lautan.

Berdasarkan uraian di atas menunjukkan bahwa adanya hubungan (korelasi) antara kejadian yang satu dengan yang lainnya. Kejadian dapat dinyatakan dengan perubahan nilai variabel. Apabila ada dua kejadian yang saling berhubungan, maka dapat dinyatakan adanya hubungan dua variabel. Dimisalkan: variabel X sebagai variabel peramal (bebas) dan Y sebagai variabel tergantung (tak bebas). Hubungan antara dua variabel tersebut dapat dinyatakan hubungan linier antara dua varibel X dan Y. Apabila variabel X dan Y mempunyai hubungan, maka nilai variabel X yang sudah diketahui dapat untuk memperkirakan atau meramalkan nilai variabel Y. Ramalan pada dasarnya merupakan perkiraan atau penaksiran mengenai terjadinya suatu kejadian akibat dari suatu penyebab.

Variabel Y yang nilainya akan diramalkan disebut variabel tak bebas (*dependent variable*), sedangkan variabel X yang nilainya dipergunakan untuk meramalkan nilai variabel Y disebut variabel bebas (*independent variable*) atau variabel peramal (*predictor*) atau varibel yang menjelaskan atau menerangkan (*explanatory*).

Analisis korelasi dan regresi mempunyai manfaat yang berbeda. Analisis korelasi dimanfaatkan untuk mengetahui keeratan hubungan antara dua variabel atau lebih tanpa memperhatikan ada atau tidaknya hubungan kausal diantara variabel-variabel itu, sedangkan analisis regresi dimanfaatkan untuk mengetahui hubungan kausal berdasarkan teori-teori yang ada. Analisis korelasi sering dimanfaatkan dalam analisis regresi, namun secara konseptual keduanya berbeda. Peranan dari analisis korelasi dan regresi linier sederhana meskipun dipergunakan secara bersama-sama, tapi dapat dibedakan pemanfaatannya.

1.1.2. Pengertian korelasi dan kegunaannya

Korelasi dapat bersifat linier atau non linier. Korelasi bersifat linier apabila semua titik-titik (X,Y) pada diagram pencar/tebar (*scatter diagram*) terlihat mengelompok atau bergerombol di sekitar garis lurus, sedangkan korelasi bersifat non linier apabila titik-titik (X,Y) terletak di sekitar kurva lengkung atau bukan linier. Di dalam analisis korelasi sederhana, kemungkinan akan dijumpai bahwa dua variabel berkorelasi positif, negatif atau tidak berkorelasi. Dua variabel berkorelasi positif apabila kedua variabel X dan Y cenderung berubah secara bersama-sama dalam arah yang sama atau apabila terjadi kenaikan (penurunan) variabel X diikuti oleh kenaikan (penurunan) variabel Y. Sebaliknya dikatakan korelasi bersifat negatif apabila kedua variabel cenderung berubah dalam arah yang berlawanan, jika variabel X meningkat menyebabkan variabel Y menurun, atau sebaliknya variabel X menurun maka variabel Y akan meningkat. Kenaikan (penurunan) variabel X diikuti dengan penurunan (kenaikan) variabel Y. Hal tersebut di atas dapat digambarkan pada contoh 1 dan 2 berikut.

Contoh :

1. Korelasi positif

Variabel X $\quad\quad\quad\quad\quad$ variabel Y

$\uparrow \quad \dashrightarrow \quad \uparrow$

(korelasi positif)

Data :

X	1	2	3	4	5	6
Y	2	5	6	9	10	13

2. Korelasi negatif

Variabel X $\quad\quad\quad\quad\quad$ variabel Y

$\uparrow \quad \dashrightarrow \quad \downarrow$

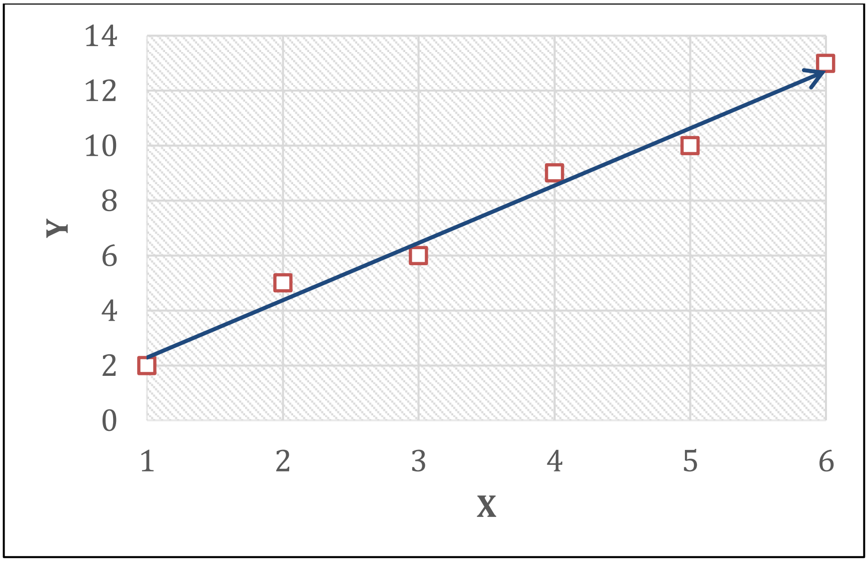
(korelasi negatif)

Data :

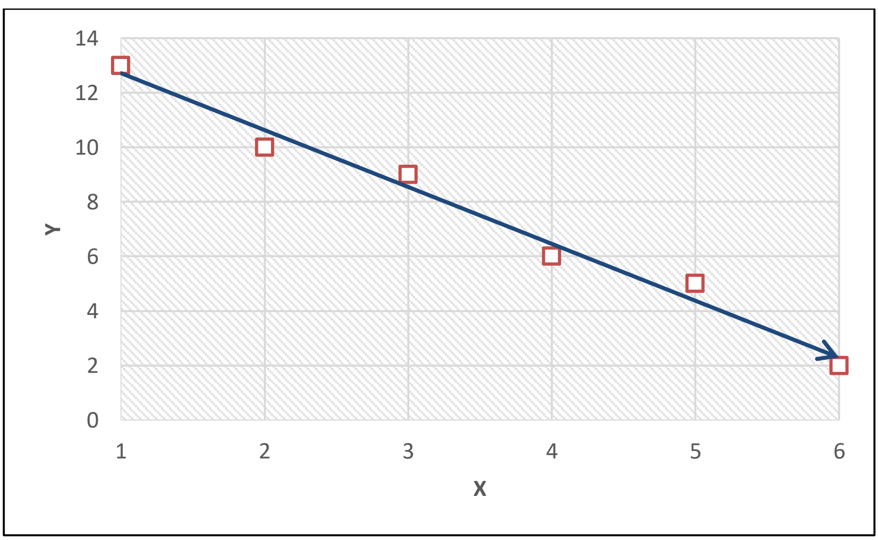
X	1	2	3	4	5	6
Y	13	10	9	6	5	2

Berdasarkan dua contoh korelasi tersebut di atas dapat dijelaskan bahwa pada contoh 1 menunjukkan bahwa setiap peningkatan penggunaan variabel X akan menyebabkan peningkatan variabel Y yang dihasilkan, sebaliknya pada contoh 2.

Contoh 1 dan 2 tersebut dapat digambarkan dalam diagram pencar atau tebar pada Gambar 1.1 dan 1.2 berikut.



Gambar 1.1.
Variabel X dan Y Berkorelasi Positif



Gambar 1.2.
Variabel X dan Y Berkorelasi Negatif

Pada Gambar 1.1 menunjukkan bahwa diagram pencar (kumpulan titik-titik koordinat mempunyai pola seolah-olah titik-titik koordinat berserakan atau berhamburan mendekati kurva linier dengan scope yang positif yaitu bergerak dari kiri bawah ke kanan atas. Gambar 1.2 menunjukkan hal yang berlawanan dengan Gambar 1.1. Pada Gambar 1.2 terlihat diagram pencar mempunyai pola dimana titik-titik koordinat berserakan atau berhamburan mendekati kurva linier dengan scope negatif bergerak dari kiri atas ke kanan bawah.

3. Tidak berkorelasi

Variabel X ↑ - - - - - - → Variabel Y tidak terpengaruh

(Tidak berkolasi)

Data :

X	1	2	3	4	5	6
Y	4	12	2	12	3	8

4. Tidak berkorelasi

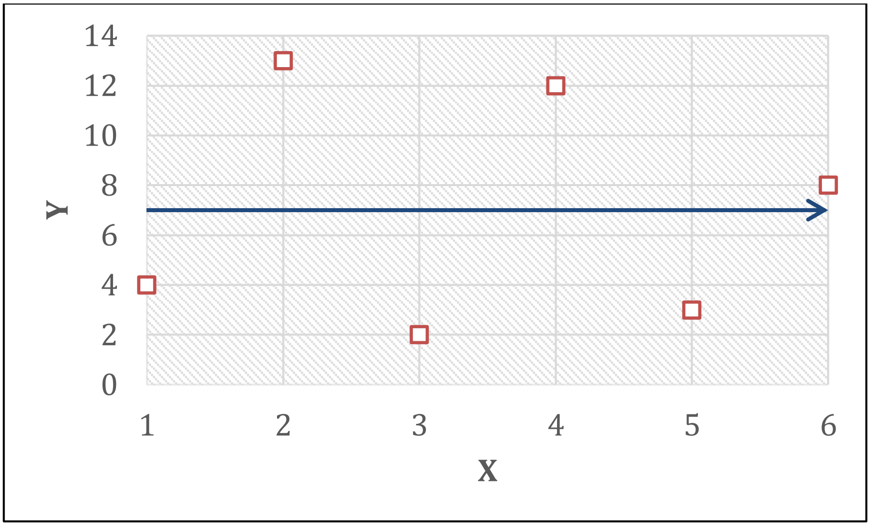
Variabel X ↑ - - - - - - → Variabel Y tidak terpengaruh

(Tidak berkolasi)

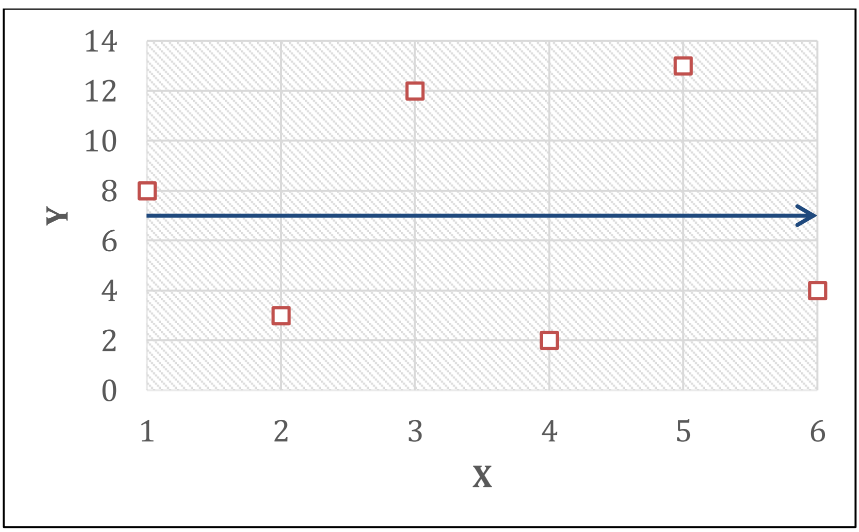
Data :

X	1	2	3	4	5	6
Y	8	3	12	2	12	4

Contoh 3 dan 4 tersebut di atas dapat digambarkan dalam diagram pencar atau tebar pada Gambar 1.3 dan 1.4 berikut.



Gambar 1.3.
Variabel X dan Y Tidak Berkorelasi



Gambar 1.4.
Variabel X dan Y Berkorelasi Negatif

Jadi kalau antara dua variabel X dan Y ada hubungan, maka bentuk diagram pencarnya mulus (teratur), sedangkan dua buah variabel dikatakan tidak berkorelasi apabila mereka cenderung berubah dengan tidak ada hubungan atau kaitan satu sama lainnya. Atau dengan kata lain, naik turunnya variabel X tidak mempengaruhi nilai variabel Y atau variabel X dan Y tidak ada hubungan. Jika ada hubungan yaitu hubungannya sangat lemah sehingga dapat dikaitkan dan digambarkan dalam bentuk diagram pencar seperti Gambar 1.3 dan 1.4 di atas.

Gambar 1.3 dan 1.4 terlihat bahwa variabel X dan Y tidak mempunyai hubungan atau hubungannya sangat lemah. Semua titik-titik koordinat menyebar di semua permukaan dari bidang X dan Y, dan dapat dikatakan nilai korelasinya mendekati 0 atau dapat dikatakan sama dengan 0.

Kuat atau lemahnya hubungan dua variabel X dan Y dapat dinyatakan dalam suatu fungsi linier dan diukur dengan suatu nilai yang disebut koefisien korelasi (*coefficient of correlation*). Koefisien korelasi mengambil nilai diantara -1 dan +1, sesuai dengan sifat korelasi itu sendiri. Jika dua variabel berkorelasi positif, maka nilai koefisien korelasi mendekati +1, sedangkan dua variabel berkorelasi negatif, maka nilai koefisien korelasi akan mendekati -1. Apabila dua buah variabel tidak berkorelasi, maka koeisien korelasi akan mendekati 0. Dengan demikian koefisien korelasi dapat ditulis selang nilai : $-1 \leq r \leq +1$.

Meskipun korelasi mengukur derajad hubungan diantara dua variabel, tetapi bukan merupakan alat untuk mengkaji hubungan kausal (sebab akibat) di antara dua variabel tersebut. Dua buah variabel yang berkorelasi erat, dengan tidak sendirinya menunjukkan bahwa terdapat hubungan di antara dua variabel tersebut.

1.1.3. Korelasi linier sederhana

Di depan telah dibahas secara sekilas tentang beberapa sifat korelasi antara dua variabel yang dapat dilihat melalui diagram tebar (*scatter diagram*). Berdasarkan diagram tebar menunjukkan kekuatan hubungan diantara dua variabel X dan Y. Jika kumpulan koordinat titik-titik (X,Y) terletak dekat kurva linier, maka menunjukkan korelasinya linier, sedangkan apabila titik-titik (X,Y) menjauhi kurva linier, menunjukkan bahwa korelasi antara X dan Y yang lemah. Penyebaran koordinat titik-titik (X,Y) dalam diagram tebar memberikan gambaran secara jelas tentang hubungan di antara variabel X dan Y, baik hubungan yang terjadi bersifat linier atau bukan linier. Jika hubungan antara kedua variabel telah diketahui, maka pengukuran yang lebih akurat dari derajad hubungan antara variabel X dan Y dengan tolok ukur yang disebut koefisien korelasi.

Jika suatu data yang dipilih secara random berukuran n dengan data (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ...,(X_n,Y_n) dan data tersebut bertebaran dalam diagram pencar menunjukkan hubungan linier (mendekati garis lurus), maka hubungan linier antara dua variabel X dan Y dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$r_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}\ \sqrt{\Sigma y_i^2}}$$

Keterangan :

$$x_i = X_i - \overline{X}\ ;\ \text{dan } \overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma X_i$$

$$y_i = Y_i - \overline{Y}\ ;\ \text{dan } \overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma Y_i$$

Atau rumus tersebut di atas dapat ditulis sebagai berikut.

$$r_{xy} = \frac{n\ \Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i\ \Sigma Y_i}{\sqrt{n\ \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}\sqrt{n\ \Sigma Y_i^2 - (\Sigma Y_i)^2}}$$

Kedua rumus tersebut disebut koefisien korelasi Pearson (*Pearson's Product Moment Coefficient of Correlation*).

Variabel X dapat mempengaruhi nilai variabel Y, apabila berubahnya nilai X akan menyebabkan adanya perubahan nilai variabel Y, sehingga nilai Y akan bervariasi baik terhadap reratanya maupun terhadap garis lurus yang mewakili diagram pencar. Besarnya variasi nilai variabel Y tidak hanya dipengaruhi oleh nilai X, melainkan terdapat faktor lain (kesalahan atau *error*) yang juga ikut berpengaruh. Besarnya pengaruh variabel X terhadap nilai variabel Y dapat dihitung dengan menggunakan koefisien penentuan atau determinasi *(coefficient of determination*) yang ditulis dengan simbul r^2. Koefisien determinasi pada dasarnya merupakan kuadrat dari koefisien korelasi. Besarnya pengaruh factor lain yang ikut berpengaruh (residual atau gangguan) sebesar = 1 - r^2.

1.1.4. Pengujian korelasi

Besarnya reliabilitas r_{xy} sangat tergantung pada besarnya sampel n. Jadi r_{xy} = 0,6 dari 10 sampel tidak memiliki reliabilitas yang sama dengan r_{xy} = 0,6 yang diperoleh dari 100 sampel. Reliabilitas r_{xy} akan makin bertambah dengan bertambahnya jumlah sampel. Untuk r_{xy} = 0, maka secara teoritik diketahui bahwa variabel acak r_{xy} itu akan menyebar mengikuti distribusi normal dengan nilai rata-rata, error (r_{xy}) = 0 dan ragam, var (r_{xy}). Oleh karena ragam, var (r_{xy}) tidak diketahui, maka kita dapat menduga berdasarkan var (r_{xy}) = $\frac{1-r_{XY}^2}{n-2}$. Dengan demikian variabel acak r_{xy} akan berdistribusi t student dengan derajad bebas V = n - 2.

Untuk menguji hipotesis tentang parameter $r_{xy} = 0$, maka perlu ditentukan langkah-langkah berikut.
Ho : $\rho_{xy} = 0$, berarti tidak ada hubungan linier antara variabel X dan Y,
Ha : $\rho_{xy} \neq 0$, berarti ada hubungan linier antara X dan Y.

Adapun langkah penyelesaian perhitungan sebagai berikut :
1. Menentukan tingkat nyata α yang digunakan.
2. Menentukan batas kritis ; $t < -t\alpha/2$; V dan $t > t\alpha/2$; V.
3. Menentukan besarnya t hitung melalui :

$$\text{T hitung} = \frac{r_{XY} - \rho_{XY}}{\sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n-2}}}$$

$$= \frac{r\,xy - 0}{\sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n-2}}}$$

$$= \frac{r\,xy\,\sqrt{n-2}}{1 - r_{xy}^2}$$

4. Bila $|t \text{ hitung}| \geq t$ tabel, Ho ditolak yang berarti ada korelasi antara X dan Y.

Pengujin korelasi yang lain

Apabila nilai r_{XY} sudah diketahui, maka kita dapat menarik beberapa kesimpulan tentang populasi atas dasar bahan-bahan dari sampel itu. Jika nilai r_{XY} yang telah diketahui, maka secara langsung kita dapat melihat tabel korelasi yang ada dalam tabel statistik (Lampiran 1). Tabel korelasi untuk menguji apakah nilai r_{XY} yang diperoleh menunjukkan ada beda nyata atau tidak berdasarkan jenjang nyata (α) tertentu. Tabel korelasi sudah mencantumkan batas-batas nilai korelasi (r) yang signifikan pada jenjang tertentu. Apabila nilai r_{XY} yang diperoleh sama dengan atau lebih besar dari nilai r dalam tabel r, maka nilai r yang diperoleh tersebut menunjukkan beda nyata. Dengan nilai r_{XY} yang berbeda nyata, maka akan menolak hipotesis yang menyatakan bahwa korelasi antara X dan Y dalam populasi adalah null atas dasar jenjang nyata tertentu atau tidak ada korelasi nyata antara X dan Y.

Syarat-syarat untuk pengujian r_{xy}

Agar kesimpulan tidak menyimpang dari kebenaran yang sesungguhnya, maka syarat-syarat berikut harus dipenuhi :

a. Sampel yang digunakan dalam penelitian atau percobaan harus sampel yang diambil secara acak dari populasi terhadap kesimpulan yang akan diambil.
b. Hubungan antara variabel X dan Y merupakan hubungan garis lurus atau linier.
c. Bentuk distribusi variabel X dan Y dalam populasi adalah mendekati distribusi normal.

Suatu hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap peningkatan input tertentu akan menyebabkan peningkatan outputnya. Data hasil penelitian Tabel 1.1 menunjukkan keeratan hubungan (korelasi) antara variabel X dan Y.

Tabel 1.1.
Korelasi Variable X dan Y

X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$ (x)	$Y_i - \bar{Y}$ (y)	x^2	y^2	Xy
1	2	-5,25	-5,75	27,5625	33,0625	30,1875
2	4	-4,25	-3,75	18,0625	14,0625	15,9375
4	5	-2,25	-2,75	5,0625	7,5625	6,1875
5	7	-1,25	-0,75	1,5625	0,5625	0,9375
7	8	0,75	0,25	0,5625	0,0625	0,1875
9	10	2,75	2,25	7,5625	5,0625	6,1875
10	12	3,75	4,25	14,0625	18,0625	15,9375
12	14	5,75	6,25	33,0625	39,0625	35,9375
$\Sigma X_i =$ 50	$\Sigma Y_i =$ 62	$\Sigma x =$ 0	$\Sigma y =$ 0	$\Sigma x^2_i =$ 107,5	$\Sigma y^2_i =$ 117,5	$\Sigma x_i y_i =$ 111,5

Diketahui : $\bar{X} = 6{,}25$ $\bar{Y} = 7{,}75$

Berdasarkan Tabel 1.1, maka besarnya koefisien korelasi dapat dihitung sebagai berikut.

$$r_{xy} = \frac{115{,}5}{\sqrt{107{,}5}\ \sqrt{117{,}5}}$$

$$= 0{,}99$$

Besarnya koefisien determinasi atau penentu (r^2) adalah $r^2 = (0{,}99)^2 =$ 0,9801 atau 98,01%

Jadi dapat diambil kesimpulan bahwa hubungan antara variabel X dan Y sangat kuat dan positif, artinya kenaikan variabel X berhubungan erat dengan kenaikan variabel Y. Sumbangan atau pengaruh variabel X terhadap Y adalah 0,9801 atau 98,01%, sisanya 2% disebabkan oleh faktor lain yang tidak terukur atau teramati. Cara perhitungan tersebut dapat dilakukan dengan cara berikut.

Tabel 1.2.
Korelasi Variable X terhadap Y

X_i	Y_i	X^2_i	Y^2_i	X_iY_i
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
4	5	16	25	20
5	7	25	49	35
7	8	49	64	56
9	10	81	100	90
10	12	100	144	120
12	14	144	196	168
$\Sigma X_i = 50$	$\Sigma Y_i = 62$	$\Sigma X^2_i = 420$	$\Sigma Y^2_i = 598$	$\Sigma X_iY_i = 499$

Berdasarkan Tabel 1.2, maka koefisien korelasi dan determinasi dapat dihitung sebagai berikut.

$$r_{XY} = \frac{n\ \Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i\ \Sigma Y_i}{\sqrt{n\ \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}\ \sqrt{n\ \Sigma Y_i^2 - (\Sigma Y_i)^2}}$$

$$= \frac{(8 \text{ x } 499) - (50 \text{ x } 62)}{\sqrt{(8 \text{ x } 420) - (50)^2} \text{ x } \sqrt{(8 \text{ x } 598) - (62)^2}}$$

$$= \frac{3.992 - 3.100}{\sqrt{3.360 - 2.500}\ x\ \sqrt{4.784 - 3.844}}$$

$$= \frac{892}{29.325 \; x \; 30.629}$$

$$= 0{,}99$$

$$r_{XY}^2 = (0{,}99)^2 = 0{,}9801 = 98{,}01\%$$

Untuk mengetahui koefisien korelasi (r) berbeda nyata atau tidak, maka dapat dihitung sebagai berikut :

$$\text{T hitung} = \frac{r_{XY} - \rho_{XY}}{\sqrt{\frac{1 - r_{XY}^2}{n-2}}}$$

$$= \frac{0{,}99\sqrt{8-2}}{1-(0{,}99)^2}$$

$$= 28{,}98$$

Kesimpulan:
T hitung lebih besar dari t tabel 0,05 (2; 6) = 2,447 yang berarti berada dalam daerah kritis maka Ho ditolak. Kesimpulan terdapat korelasi yang nyata positif antara variabel X dan Y.

Koefisien korelasi yang diperoleh r_{XY} = 0,99 dibandingkan dengan nilai r dari tabel korelasi yaitu r tabel 5% db (n-2) = r 5% db (6) = 0,707. R_{XY} hitung lebih besar daripada r tabel, maka berada dalam daerah kritis, maka Ho ditolak, sehingga terdapat korelasi yang nyata dan bersifat positif antara variabel X dan Y.

1.1.5. Korelasi untuk data berkelompok

Jika banyak pasangan data (X_i, Y_i) besar, maka untuk menghemat waktu perhitungan, perlu dilakukan pengelompokan ke dalam kelas-kelas distribusi frekuensi sebelum perhitungan dilakukan. Untuk data X_i dan Y_i yang telah dikelompokkan ke dalam tabel distribusi frekuensi dua arah, maka perhitungan koefisien korelasi dengan rumus:

$$r_{XY} = \frac{n\ \Sigma f_{XY} X_i Y_i - \Sigma f_X X_i\ \Sigma f_Y Y_i}{\sqrt{n\ \Sigma f_X X_i^2 - (\Sigma f_X X_i)^2}\ \sqrt{n\ \Sigma f_Y Y_i^2 - (\Sigma f_Y Y_i)^2}}$$

Keterangan :

n = Jumlah frekuensi

f_{xy} = Frekuensi untuk pasangan data X_i dan Y_i

f_x = Frekuensi untuk kelas X_i

fy = Frekuensi untuk kelas Y_i

X_i = Nilai rata-rata untuk kelas X_i (titik tengah)

Y_i = Nilai rata-rata untuk kelas Y_i (titik tengah)

Contoh :

Suatu penelitian terhadap 58 daerah di Indonesia untuk mengetahui korelasi antara variabel presentase lahan pertanian (X) dan persentase penduduk miskin (Y) di setiap daerah. Untuk memudahkan perhitungan, maka data dikelompokkan ke dalam tabel distribusi frekuensi dua arah untuk variabel X dan Y. Data penelitian pada Tabel 1.3.

Distribusi frekuensi variabel persentase lahan pertanian (X) dan persentase penduduk miskin (Y) di 58 daerah di Indonesia (data hipotesis) disajikan pada Tabel 1.3 berikut.

Tabel 1.3.
Persentase Lahan Pertanian dan Presentase Penduduk Miskin

Batas kelas (yi)	Nilai tengah (xi)	(2,5-7,9) 5,2	(8,0-13,4) 10,7	(13,5-18,9) 16,2	(19,0-24,4) 21,7	(35,5-40,9) 38,2	Fy
10,0-14,9	12,45	4	-	-	-	-	4
15,0-19,9	17,45	-	4	4	-	-	8
20,0-24,9	22,45	-	1	3	3	1	8
25,0-29,9	27,45	-	1	4	8	1	14
30,0-34,9	32,45	-	-	5	7	12	24
	Fx	4	6	16	18	14	

Selanjutnya dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut.

$\Sigma f_{xy} x_i y_i$ = (4)(5,2)(12,45) + (4)(10,7)(17,45) + ... + (7)(21,7)(32,45) + (12)(38,32)(32,45)
= 36.106,02

$\Sigma f_x\, x_i$ = (4)(4,52) + (6)(10,7) + ... + (14)(38,2)
= 12,69

$\Sigma f_x\, x^2_i$ = $(4)(4,52)^2 + (6)(10,7)^2 + ... + (14)(38,2)^2$
= 33.873,08

$\Sigma f_y y_i$ = (4)(12.45) + (8)(17.45) + ... + (24)(32,45)
= 1.532,10

$\Sigma f_y y^2_i$ = $(4)(12,45)^2 + (8)(17,45)^2 + ... + (24)(32,45)^2$
= 42.909,15

Dengan cara memasukkan angka-angka hasil perhitungan di atas ke dalam rumus akan diperoleh hasil :

$$r_{XY} = \frac{n\ \Sigma f_{XY} X_i Y_i - \Sigma f_X X_i\ \Sigma f_Y Y_i}{\sqrt{n\ \Sigma f_X X_i^2 - (\Sigma f_X X_i)^2}\ \sqrt{n\ \Sigma f_Y Y_i^2 - (\Sigma f_Y Y_i)^2}}$$

$$= \frac{(58)(36.106,02) - (1.269,60)(1.532,10)}{\sqrt{(58)(33.873,08) - (1.269,60)^2}\ \sqrt{(58)(42.909,15) - (1.532,10)^2}}$$

$$= 0,667$$

Perhitungan di atas tampak adanya korelasi positif antara variabel persentase lahan pertanian (X) di suatu daerah dengan tingkat kemiskinan penduduk (Y) di daerah itu karena r_{XY} = 0,667 lebih besar dari r tabel 0,05 (58 - 1) = 0,251.

1.1.6. Korelasi untuk data rank

Berikut sekumpulan data dan cara pemberian rank untuk suatu kumpulan data :

Contoh :

Data : 5, 7, 8, 10, 15

Rank : 1, 2, 3, 4, 5

Jika ada dua data yang bernilai sama, maka rank dari data itu merupakan rata-rata urutan data tersebut :

Data : 5, 4, 3, 3, 5, 7, 4, 8, 10

Maka cara pemberian rank untuk data tersebut:

Data : 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 10

Rank : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Sehingga :

Data bernilai 3 diberi rank rata-rata = (1+2)/2 = 1,5

Data bernilai 4 diberi rank rata-rata = (3+4)/2 = 3,5

Data bernilai 5 diberi rank rata-rata = (5+6)/2 = 5,5

Data bernilai 7 diberi rank = 7

Data bernilai 8 diberi rank = 8

Data bernilai 10 diberi rank = 9

Maka sekumpulan data di atas beserta ranknya adalah:

Data : 5, 4, 3, 3, 5, 7, 4, 8, 10

Rank : 5,5; 3,5; 1,5; 1,5; 5,5; 7; 3,5; 8; 9

Setelah memahami cara pemberian rank pada suatu kumpulan data, maka berikut ini akan dikarenakan dua alat analisis korelasi untuk data rank, yaitu korelasi rank spearman dan korelasi Tau Kendall (σ-Kendall).

1.1.6.1. Korelasi rank Spearman

Korelasi ini diperkenalkan pertama kali oleh Carl Spearman tahun 1904. Statistik ini berguna untuk menentukan korelasi antara dua variabel yang diukur menggunakan skala pengukuran ordinat.

Misalnya cita rasa seseorang terhadap rasa buah semangka yang diukur menggunakan skala ordinal.

Contoh :

- Sangat manis diberi nilai 5
- Manis diberi nilai 4
- Cukup masanis diberi nilai 3
- Kurang manis diberi nilai 2D_i
- Tidak manis diberi nilai 1

Rumus untuk korelasi Spearman adalah :

$$r_s = 1 - \frac{6 \ \Sigma \ d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Keterangan :

d_i = Selisih setiap pasang rank yang berkaitan dengan pasangan data (x_i, y_i).

n = Banyaknya pasangan rank

Koefisien korelasi Spearman memiliki sifat seperti korelasi *product moment* yang telah dibahas di depan, demikian cara penyajian hipotesis tentang koefisien korelasi menggunakan statistik t. Statistik t akan menyebar mengikuti distribusi t student dengan derajad bebas; db = n - 2.

Contoh :

Tabel 1.4.
Jumlah Malai (X) dan Jumlah Bibit Padi per Rumpun (Y)

No.	X_i	Y_i	Rank X_i (R_{xi})	Rank Y_i (R_{yi})	$d_i^2 = (R_{xi} - R_{yi})^2$
1	3	5	5,5	9	12,25
2	4	3	7,5	2	30,25
3	2	4	3	5,5	6,25
4	5	5	9,5	9	0,25
5	3	4	5,5	5,5	0,00
6	2	3	3	2	1,00
7	1	4	1	5,5	20,25
8	2	3	3	2	1,00
9	4	5	7,5	9	2,25
10	5	4	9,5	5,5	16,00

Dengan mensubstitusikan hasil perhitungan dalam Tabel 1.4 ke dalam rumus akan diperoleh hasil :

$$r_s = 1 - \frac{6 \ \Sigma d_i^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 89{,}5}{10\,(100 - 1)}$$

$$= 0{,}458$$

Lebih lanjut perlu dilakukan uji terhadap koefisien korelasi yang diperoleh menunjukkan berbeda nyata atau tidak, maka dilakukan uji hipotesis tentang koefisien korelasi.

Langkah-langkah pengujiannya :

Ho : $r_s =$ 0, tidak ada korelasi jumlah malai dan jumlah bibit padi per rumpun terhadap produksi padi

Ha : $r_s \neq$ 0, ada korelasi jumlah malai dan jumlah bibit padi per rumpun terhadap produksi padi

Daerah kritis :

- t hitung < -t tabel (α/2 ; n-2) dan t hitung > -t tabel (α/2; n-2),
- -t tabel (0,05/2 ; 10-2) = -t tabel (0,025 ; 8) = -2,306,
- +t tabel (0,05/2 ; 10-2) = +t tabel (0,025 ; 8) = +2,306.

Uji statistik yang sesuai untuk hipotesis di atas adalah :

$$\text{t hitung} = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

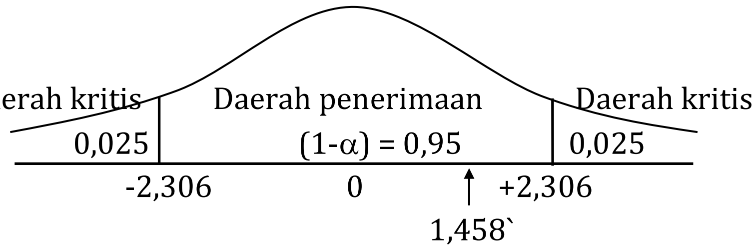
$$= \frac{0{,}458\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0{,}458)^2}}$$

$$= 1{,}458$$

Kesimpulan :

Karena t hitung lebih kecil daripada t tabel 0,025 (8) = 2,306, maka berada dalam daerah penerimaan, maka diputuskan bahwa tidak ada korelasi yang nyata antara jumlah malai dan jumlah bibit padi per rumpun terhadap produksi padi. Nilai t = 1,458, berada pada daerah penerimaan, sehingga Ho diterima.

Distribusi t-student untuk pengujian hipotesis di atas ditunjukkan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5.
Distribusi T-Student untuk Pengujian Hipotesis tentang Parameter Koefisien Korelasi.

1.1.6.2. Korelasi Tau-Kendall (σ-Kendall)

Korelasi rank lain yang dapat dipergunakan untuk menganalisis korelasi antara dua variabel yang diukur dengan skala ordinat adalah korelasi Tau-Kendall (σ-Kendall) yang diperkenalkan oleh Maurice G. Kendall pada tahun 1938.

Korelasi Tau-Kendall ditentukan dengan rumus :

$$\sigma = 1 - \frac{s}{\frac{1}{2}\,n\,(n-1)}$$

Koefisien korelasi Tau-Kendall mengambil nilai di antara -1 dan +1, sehingga dituliskan berikut :

$$-1 \leq \sigma \leq +1$$

Pengujian tentang koefisien korelasi Tau-Kendall menggunakan suatu pendekatan statistik uji z, berikut.

$$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{Var}\ (\sigma)}}$$

Keterangan :

$$\mathrm{Var}\ (\sigma) = \frac{2\ (2n + 5)}{9n\ (n + 1)}$$

Kaidah keputusan untuk uji ini adalah Ho diterima apabila nilai z berada dalam daerah penerimaan dan Ho ditolak apabila nilai z berada di luar daerah penerimaan.

Contoh :

Kita menggunakan kembali data jumlah malai dan jumlah bibit padi per rumpun terhadap produksi padi pada Tabel 1.4 di atas.

Langkah-langkah untuk menghitung koefisien korelasi Tau-Kendall, adalah sebagai berikut :

1) Urutkan rank x_i (R_{xi}) dari uraian terkecil sampai terbesar, sedangkan R_{yi} mengikutinya, berikut :

   R_{xi} = 1 3 3 3 5,5 5,5 7,5 7,5 9,5 9,5

   R_{yi} = 5,5 5,5 2 2 5,5 9 2 9 9 5,5

2) Berdasarkan R_{xi} dan R_{yi} di atas, kita bandingkan setiap pasangan rank untuk skor y_i (R_{yi}) setelah R_{xi} berurutan seperti pada langkah 1. Setiap perbandingan menghasilkan nilai + dan -, dimana jumlah semua nilai ini dinotasikan dengan s, yang merupakan pembilang (numerator) dari koefisien korelasi Tau-Kendall.

Cara perbandingan sebagai berikut :

R_{yi} = 5,5 5,5 2 2 5,5 9 2 9 9 5,5

Perbandingan dimulai dari angka paling kiri (angka pertama) yaitu angka 5,5. Dengan menghitung yang lebih besar dari 5,5 maka terdapat 3 buah yaitu 9, 9 dan 9. Untuk itu diberi nilai +3. Kemudian membandingkan rank yang lebih kecil dari 5,5, di sini ada 3 buah yaitu 2, 2 dan 2 sehingga diberi -3. Hasil pembandingan pertama ini adalah penjumlahan kedua nilai +3 dan -3 sehingga hasilnya = 0. dan seterusnya pembandingan kedua dimulai dari kiri yaitu rank 5,5, dalam hal ini akan memberikan hasil: +3-3 = 0. Pembandingan ketiga dilakukan untuk rank ketiga dari kiri, yaitu rank 2. Banyaknya rank di sebelah kanan rank 2 yang lebih besar ada 5 buah yaitu rank 5,5, 9, 9, 9 dan 5,5 sehingga diberi nilai 5. Banyaknya rank di sebelah rank 2 yang lebih kecil tidak ada sehingga diberi nol. Penjumlahan kedua nilai memberikan hasil +5+0 = +5, dan seterusnya.

Pembandingan keempat, kelima dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, dan apabila hal ini dilakukan akan memberikan hasil seperti pada Tabel 1.5 berikut.

Tabel 1.5.
Data Rank untuk Skor

R_{yi}	Lebih besar (a)	Lebih kecil (b)	Hasil (S_i) (a+b)
5,5	+3	-3	0
5,5	+3	-3	0
2	+5	0	+5
2	+5	0	+5
5,5	+3	-1	+2
9	0	-2	-2
2	+3	0	+3
9	0	-1	-1
9	0	-1	-1
5,5	0	0	0
			$\Sigma S_i = 11$

Koefisien korelasi tau-Kendall dihitung berdasarkan rumus :

$$\sigma = 1 - \frac{s}{\frac{1}{2}\,n\,(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{11}{\frac{1}{2}\,10\,(10-1)}$$

$$= 0{,}24$$

Setelah diketahui nilai koefisien tau-Kendall, maka perlu pengujian terhadap koefisien korelasi berbeda nyata atau tidak. Pengujian terhadap hipotesis tentang koefisien korelasi Tau-Kendall dapat mengikuti langkah-langkah :

Hipotesis :

Ho : $\sigma = 0$ lawan Ha : $\sigma \neq 0$, pada $\alpha = 5\%$

Daerah kritis : z hitung < -1,96 dan z hitung > 1,96

Uji statistik z ditentukan sebagai berikut :

$$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(\sigma)}}$$

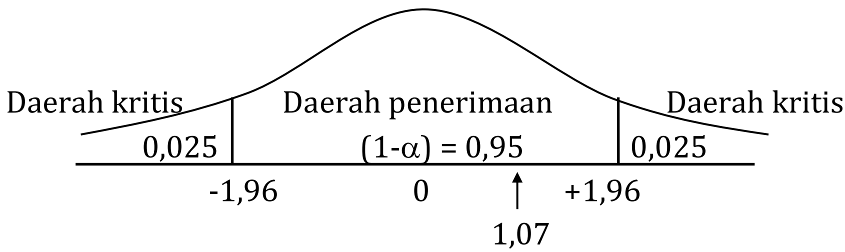
$$= \frac{0{,}24}{\sqrt{\frac{2(20+5)}{90(10+1)}}}$$

$$= 1{,}07$$

Kesimpulan:

Nilai z hitung = 1,07 lebih kecil dari z tabel 0,025 = 1,96 yang berarti berada dalam daerah penerimaan, maka diputuskan menerima Ho. Hal ini berarti tidak ada korelasi antara jumlah malai dan bibit padi per rumpun terhadap produksi padi.

Distribusi z untuk pengujian hipotesis tentang parameter koefisien korelasi tau-Kendall, ditunjukkan dalam Gambar 1.6.



Gambar 1.6.
Distribusi z untuk Pengujian Hipotesis tentang Parameter Koefisien Korelasi Tau-Kendall, σ = 0

Nilai t hitung = 1,07 berada pada daerah penerimaan, sehingga Ho diterima.

1.1.7. Korelasi untuk data kualitatif

Rumus koefisien korelasi yang telah dibahas hanya berlaku untuk data kuantitatif. Banyak sekali hasil penelitian yang menghasilkan data kualitatif yang berupa kategori-kategori, misal: pendapatan penduduk, yaitu : tinggi, sedang dan rendah atau besar, sedang dan rendah.

Apabila ingin mengetahui hubungan antara dua variabel misal antara pendidikan dan pendapatan. Maka data pengamatan dikelompokkan ke dalam tabel kontingensi berukuran b x k, dimana b menunjukkan banyaknya baris, sedangkan k menunjukkan banyaknya kolom. Untuk mengukur kuatnya korelasi antara dua variabel yang telah digolongkan ke dalam tabel kontingensi berukuran b x k, digunakan *contingency coefficient* (koefisien bersyarat), c yang dapat dihitung dengan rumus:

$$C = \sqrt{\frac{X^2}{(n + X^2)}}$$

Keterangan :

n = Jumlah atau banyaknya pengamatan

X^2 = Statistik khi-kuadrat yang dihitung dengan rumus,

$$= \Sigma\Sigma\left(\frac{O_{ij} - E_{ij}}{E_{ij}}\right)$$

O_{ij} = Frekuensi pengamatan dalam baris ke-i dan kolom ke-j (dalam sel ij)

E_{ij} = Frekuensi yang diharapkan dalam baris ke-i dan kolom ke-j (dalam sel ij) yang dapat dihitung dengan rumus.

Contoh :

Untuk mengetahui hubungan antara tingkat pendidikan ibu rumah tangga dan konsumsi susu sapi dari anggota keluarga mereka, kemudian dilakukan penelitian dengan hasil seperti Tabel 1.6.

Tabel 1.6.
Hubungan Tingkat Pendidikan Ibu RT dan Konsumsi Susu Sapi Anggota Keluarga

Pendidikan	Konsumsi			
	Kurang	Cukup	Sangat Cukup	Jumlah
Tidak tamat SMA	82 (53,79)	65 (81,76)	12 (23,53)	159
Tamat SMA	59 (65,86)	112 (100,28)	24 (28,86)	195
Perguruan Tinggi	37 (58,43)	94 (88,96)	42 (25,61)	173
Jumlah	178	271	78	Σn = 527

Perhitungan :

$$E_{11} = \frac{(159)\,(178)}{527} = \frac{28,302}{527} = 53,70$$

$$E_{12} = \frac{(159)\,(271)}{527} = \frac{43,089}{527} = 81,76$$

$$E_{13} = \frac{(159)\,(78)}{527} = \frac{12,402}{527} = 23,53$$

$$E_{21} = \frac{(195)\,(178)}{527} = \frac{34,710}{527} = 65,86$$

$$E_{22} = \frac{(195)\,(271)}{527} = \frac{52,845}{527} = 100,28$$

$$E_{23} = \frac{(195)\,(78)}{527} = \frac{15,216}{527} = 28,86$$

$$E_{31} = \frac{(173)\,(178)}{527} = \frac{30,794}{527} = 58,43$$

$$E_{32} = \frac{(173)\,(271)}{527} = \frac{46,883}{527} = 88,96$$

$$E_{33} = \frac{(173)\,(78)}{527} = \frac{13,494}{527} = 25,61$$

Khi-kuadrat :

$$X^2 = \Sigma\Sigma\left(\frac{82 - 53,79}{53,79}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{42 - 25,61}{53,79}\right)^2$$

$$= 45,42$$

$$C = \sqrt{\frac{X^2}{(n + X^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{45,42}{(527 + 45,42)}}$$

$$= 0,28$$

Jadi *contingency coefficienty* atau koefisien korelasi antara tingkat poendidikan ibu rumah tangga dengan tingkat konsumsi susu sapi anggota rumah tangga = 0,28.

Kemudian dapat dilanjutkan uji terhadap koefisien korelasi berbeda nyata atau tidak, maka uji hipotesis tentang koefisien korelasi dengan langkah berikut.

Hipotesis :

Ho : Tidak ada korelasi antara tingkat pendidikan ibu rumah tangga dengan konsumsi susu sapi rumah tangga.

Ha : Ada korelasi antara tingkat pendidikan ibu rumah tangga dengan konsumsi susu sapi rumah tangga.

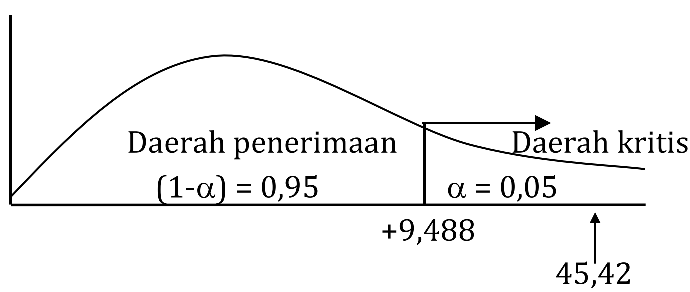
Daerah kritis :

x^2 hitung = 48,42 > x^2 tabel 0,05 ; V=(3-1)(3-1) = 9,488

Kesimpulan :

Nilai x^2 hitung = 45,42 lebih besar daripada x^2 tabel 0,05 (4) = 9,488, berarti berada dalam daerah kritis, maka Ho ditolak.

Distribusi Khi-kuadrat untuk pengujian hipotesis di atas ditunjukkan pada Gambar 1.7 di bawah ini.



Gambar 1.7.
Distribusi Khi-Kuadrat untuk Pengujian Hipotesis Korelasi antara Dua Variabel X dan Y dalam Tabel Kontingensi Berukuran B x K.

1.2. Regresi Linier Sederhana

1.2.1. Pengertian regresi sederhana

Pada percobaan atau penelitian, model regresi sering digunakan untuk mengetahui atau meramalkan atau memprediksi pengaruh variabel X terhadap variabel Y yang diamati. Di dalam pembahasan ini terbatas pada regresi linier sederhana yaitu mengenai hubungan kausal antara dua variabel yang dinyatakan dalam suatu garis lurus. Analisis regresi dipergunakan untuk mengetahui hubungan kausal antara variabel X dan Y berdasarkan teori-teori yang ada.

1.2.2. Diagram pencar/tebar (*scatter diagram*)

Setelah ditetapkan bahwa terdapat hubungan kausal antara dua variabel, maka untuk mendukung analisis lebih jauh digunakan grafik untuk mendapatkan data yang ada. Grafik tersebut disebut diagram pencar atau tebar, yang menunjukkan titik-titik tertentu. Setiap titik menunjukkan suatu hasil yang dinilai sebagai variabel bebas (X) maupun tak bebas (Y).

Diagram pencar ini memberikan dua manfaat :

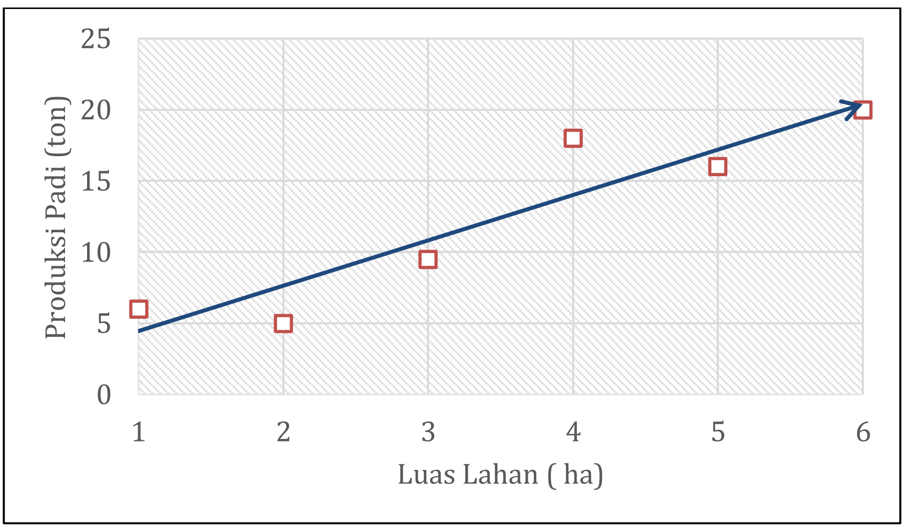
a. Membantu menunjukkan ada tidaknya hubungan kausal yang bermanfaat antara dua variabel.
b. Membantu menetapkan tipe persamaan yang menunjukkan hubungan kausal antara kedua variabel tersebut.

Untuk menjelaskan tujuan dan manfaat diagram pencar tersebut dengan menggunakan data luas lahan (X) dan produksi padi (Y) pada Tabel 1.7 berikut.

Tabel 1.7.
Pengamatan Luas lahan (ha) (X) dan Produksi Padi (Y) (ton/ha)

X	1	2	3	4	5	6
Y	6	5	9,5	18	16	20

Data pada Tabel 1.7 di atas menunjukkan bahwa titik-titik pada diagram pencar terlihat membentuk suatu garis lurus, dan adanya pengaruh yang sangat kuat bahwa semua titik sangat dekat dengan garis lurus yang ditetapkan. Berdasarkan diagram pencar pada Gambar 1.8 dapat dilihat bahwa ada pengaruh yang positif antara variabel X terhadap Y, yaitu apabila luas lahan meningkat maka menyebabkan produksi padi akan meningkat (Gambar 1.8). Pengaruh variabel X bisa bersifat negatif (berlawanan) yaitu apabila variabel X meningkat justru menyebabkan variabel Y akan menurun.



Gambar 1.8.
Diagram Pencar Mempetakan Hubungan antara Luas Lahan (ha) dengan Produksi Padi (ton/ha)

Persoalan yang terjadi yaitu garis atau kurva yang cukup mewakili pengaruh variabel X terhadap Y? Apabila titik-titik dalam diagram pencar terletak dalam satu garis atau kurva, maka tidak ada persoalan, tetapi bila titik diagram pencar tidak terletak dalam satu garis akan timbul persoalan karena akan terdapat banyak garis atau kurva yang dapat mewakili diagram pencar tersebut.

Dalam teori regresi, maka garis yang mewakili yaitu garis yang dibuat sedemikian rupa sehingga total error yang mungkin timbul dapat ditekan sekecil mungkin. Diantara metode yang digunakan untuk memperkecil besarnya error yang ada, yaitu metode jumlah kuadrat terkecil (*least square method*) hingga saat ini masih dianggap sebagai metode yang terbaik. Metode *least square* ini digunakan untuk meminimkan jumlah kuadrat error berikut.

$\Sigma (Y_i - \bar{Y}) = 0$, dan

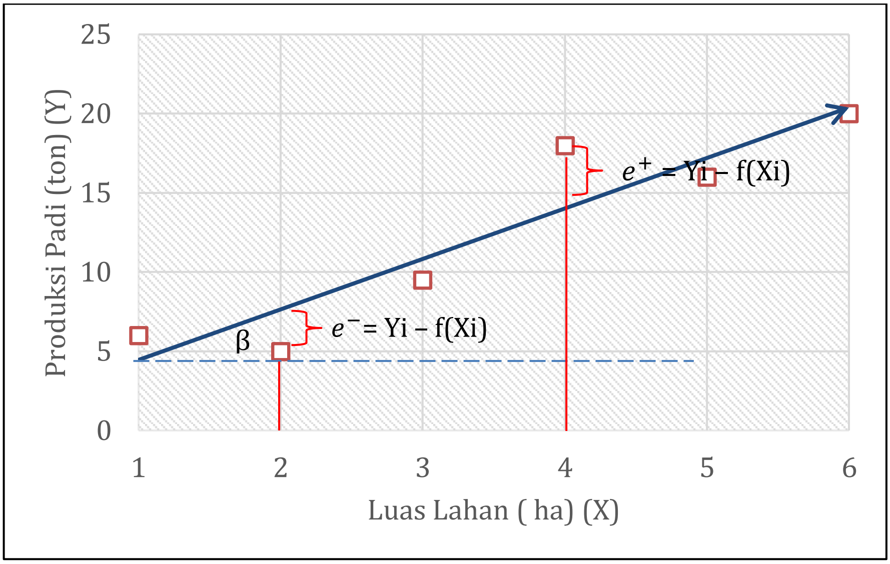
$\Sigma (Y_i - \bar{Y})^2$ = nilai terkecil atau terendah (minimum)

Garis regresi akan ditempatkan dalam diagram pencar sedemikian (memotong di tengah-tengahnya). Penyimpangan (perbedaan) positif dari titik-titik pencar di atas garis regresi akan mengimbangi penyimpangan negatif titik-titik pencar yang terletak di bawah garis, sehingga hasil penyimpangan keseluruhan titik terhadap garis lurus regresi jumlahnya nol (Gambar 1.9).

Beberapa keunggulan dari metode *least square* yaitu :

a. Dengan mengkuadratkan, maka semua simpangan (*error*) yang ada berubah menjadi positif.
b. Dengan mengkuadratkan, maka nilai error yang kecil akan diperbesar dan bila nilai ini diminimkan, maka garis regresi yang dihasilkannya akan mendekati ketepatan bila digunakan sebagai penduga (*fitted line*).

c. Manipulasi aljabar dari metode *Least Square* dan teori *maximum likelihood estimation* yang kesemuanya membuktikan bahwa minimisasi jumlah kuadrat dari error merupakan teknik estimasi yang terbaik.



Gambar 1.9.
Hubungan antara Penduga Y_i dengan Y.

Jika ΔY/ΔX konstan, maka regresi linier
jika ΔY/ΔX tidak konstan, maka regresi tak linier

Jika e_i = (-)/(+) dikuadratkan, maka dapat ditekan sekecil mungkin.

$Y_i = a + bX + e_i$

Jika memenuhi teori jumlah kuadrat:

$\Sigma e_i = \Sigma(Y_i - \overline{Y}_i)^2$ (minimum)

Diturunkan lagi :

$e_i = Y_i - a - bX_i$

$\Sigma e_i^2 = \Sigma(Y_i - a - bX_i)^2$ (minimum)

Caranya diturunkaan pada parameternya, kemudian samakan 0

- $\dfrac{\delta\Sigma(Yi - a - bXi)^2}{\delta a} = 0 \rightarrow -2\,\Sigma(Y_i - a - bX_i)$
- $\dfrac{\delta\Sigma(Yi - a - bXi)^2}{\delta b} = 0 \rightarrow -2\,\Sigma X_i(Y_i - a - b)$

$\Sigma(Y_i - a - bX_i) = 0$

$\Sigma X_i(Y_i - a - b) = 0$

$\Sigma Y_i - n.a - b\,\Sigma X_i = 0$

$\Sigma X_i.Y_i - a\Sigma X_i - b\Sigma X_i - b\Sigma X_i^2 = 0$

Persamaan normal :

$n.a + b\Sigma X_i = \Sigma Y_i$

$a\Sigma X_i + b\Sigma X_i^2 = \Sigma X_i Y_i$

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_i.Y_i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X'X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'Y \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'X^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X'Y \end{vmatrix}$$

1.2.3. Teori jumlah kuadrat (*least square theory*)

Teori ini akan digunakan untuk menempatkan garis pada data yang diamati, sehingga bentuk persamaan regresi berikut:

$$\acute{y} = \overline{Y} + b\,(X - \overline{X})$$

Keterangan :

a = Intercept dari persamaan garis regresi
= Besarnya Y pada saat garis regresi tersebut memotong sumbu Y (nilai ý = a, apabila x = 0)
b = Kemiringan dari garis regresi atau koefisien regresi, mengukur besarnya pengaruh X terhadap Y.
$\overline{X}$ = Nilai rerata dari variabel X
X = Nilai tertentu dari variabel bebas
$\overline{Y}$ = Nilai rerata sesungguhnya variabel Y
ý = Nilai yang diramalkan/ditaksir pada variabel tak bebas.

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{\Sigma xiyi}{\Sigma xi^2}$$

Keterangan :

$x_i = X_i - \overline{X}$

$y_i = Y_i - \overline{Y}$

$i = 1, 2, ..., n$

Atau :

$Y = a + bX + e$

Keterangan :

a = Intercept dari persamaan garis regresi

= Besarnya y pada saat garis regresi tersebut memotong sumbu y (nilai y bila x = 0)

b = Kemiringan dari garis regresi atau koefisien regresi, mengukur besarnya pengaruh x terhadap y.

X = Nilai tertentu dari variabel bebas

Y = nilai yang diramalkan/ditaksir pada variabel tak bebas.

Besarnya nilai dari a dan b pada persamaan regresi dapat dihitung dengan rumus di bawah ini.

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y})}{\Sigma(X_i - \dot{X})^2}$$

$$= \frac{\Sigma\, X_i Y_i - \frac{(\Sigma X_i)(\Sigma X_i)}{n}}{\Sigma\, X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n}}$$

Atau koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\,\Sigma X_i Y_i - (\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

Konstanta a :

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

Pada Tabel 1.8 dicontohkan langkah-langkah untuk menghitung konstanta (a) dan koefisien regresi (b).

Tabel 1.8.
Penggunaan rumus untuk mencari nilai a dan b

No.	Xi	Yi	Xi^2	Yi^2	XiYi	$Xi-\overline{X}$ (xi)	xi^2	$Yi-\overline{Y}$ (yi)	Xy
1	19	15	361	225	285	-32,62	1.064,06	-21,5	701,33
2	27	20	729	440	540	-24,62	606,14	-16,5	406,23
3	39	28	1.521	784	1.092	-12,62	159,26	-8,5	107,27
4	47	36	2.209	1.296	1.692	-4,62	21,34	-0,5	2,31
5	52	42	2.704	1.764	2.184	0,38	0,14	5,5	2,09
6	66	45	4.356	2.025	2.970	14,38	206,78	8,5	122,23
7	78	51	6.084	2.601	3.978	26,38	695,90	14.5	382,51
8	85	55	7.225	3.025	4.675	33,38	1.114,22	18,5	617,53
Jumlah Rerata	413 56,2	292 36,5	25.189	12.120	17.416	0	3.867,84	0	2.341,5

Hasil perhitungan pada Tabel 1.8 di atas disubstitusikan ke dalam rumus koefisien regresi (b) :

$$b = \frac{\Sigma\, x_i y_i}{\Sigma\, x_i^2}$$

$$= \frac{2.341{,}5}{3.867{,}84}$$

$$= 0{,}61$$

Atau :

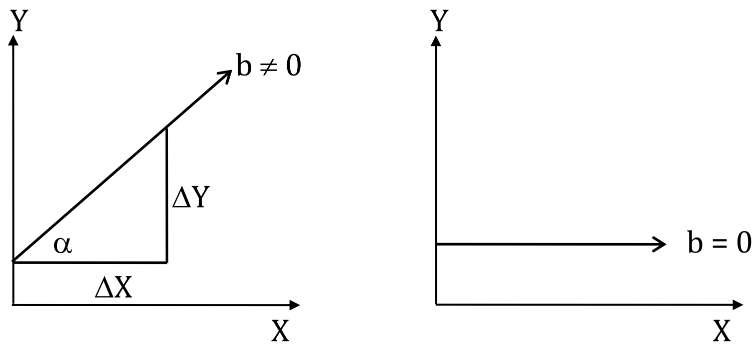
$$b = \frac{n\, \Sigma X_i Y_i - (\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)}{n\, \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

$$= \frac{8(17.416) - (413)(292)}{8(25.189) - (413)^2}$$

$$= 0{,}61$$

Jika b = 0,61 beda nyata, maka Ha diterima $\Delta Y \neq 0$, X benar-benar berpengaruh nyata pada variabel Y. Persoalannya yaitu mengukur presisi dari regresi tersebut.

Hipotesis : Ho : b = 0 dan Ha : b ≠ 0



b = 0, artinya tg α = 0, maka ΔY/ΔX = 0 → ΔY = 0

Konstanta :

$a = \overline{Y} - b\overline{X}$

$= 36,50 - 0,61(51,62)$

$= 5,01$

Jadi : Y = 5,01 + 0,61 X

Atau :

$\acute{y} = \overline{Y} + b\,(X - \overline{X})$

$= 36,50 + 0,61(X - 51,62)$

$= 36,50 + 0,61\,X - 31,488$

$= 5,061 + 0,61\,X$

Sehingga diperoleh persamaan garis regresi : Y = 5,061 + 0,61 X, koefisien regresi (b) = 0,61 berarti apabila X meningkat 1 unit, maka akan menyebabkan peningkatan Y sebesar 0,61 kali. Jadi kalau nilai X disubstitusikan ke dalam persamaan y, maka dapat untuk meramalkan nilai Y yang diprediksi. Dan tujuan utama penggunaan persamaan regresi adalah memperkirakan nilai dari variabel tak bebas pada nilai variabel bebas tertentu.

Garis lurus yang terdapat pada diagram pencar yang menunjukkan adanya hubungan antara kedua variabel disebut garis regresi/perkiraan. Persamaan yang digunakan untuk mendapatkan garis regresi pada data diagram pencar disebut persamaan regresi atau persamaan perkiraan.

Bagaimana melihat bahwa regresi linier itu betul-betul tepat atau apakah regresi presisinya tinggi? Maka dengan melihat koefisien determinasi (r^2). r^2 menyatakan besarnya kuadrat regresi terhadap jumlah kuadrat totalnya. Maka perlu dibuat Tabel 2.3 yaitu tabel analisis ragam (*analysis of variance = Anova*) regresi linier sederhana.

Langkahnya :

Faktor koreksi (FK) = $\dfrac{(\Sigma Y)^2}{n}$

Jumlah kuadrat total (JKT) = $\Sigma y^2 = Y^2 - FK$

Jumlah kuadrat regresi (JKR) = $b\ \Sigma xy$

$= b\ \Sigma(X - \bar{X})\ (Y - \bar{Y})$

$= b\ (\Sigma XY - (\Sigma X\ \Sigma Y)/n)$

JK galat (JKG) = JK total - JK regresi

$= \Sigma y^2 - b\ \Sigma xy$

Kuadrat tengah regresi (KTR) = $\dfrac{\text{JK regresi}}{\text{DB regresi}}$

Kuadrat tengah galat (JKG) $= \dfrac{\text{JK galat}}{\text{DB galat}}$

Tabel 1.9.

Analisis ragam Regresi Linier Sederhana

Sumber ragam (SR)	Derajad bebas (DB)	Jumlah kuadrat (JK)	Kuadrat tengah (KT)	F. hitung	F. tabel α %
Regresi (R)	1	JKR	KTR	$\dfrac{KTR}{KTG}$	(DBR; DBG)
Galat (G)	n-2	JKG	KTG		
Total	n-1	JKT			

Koefisien determinasi (r^2) :

$$r^2 = \frac{\text{Jumlah kuadrat regresi (JKR)}}{\text{Jumlah kuadrat total (JKT)}}$$

Regresi (b) berpengaruh nyata atau tidak dengan melihat F hitung.

F hitung = KT Regresi / KT Galat

Kriteria :

- Jika F hitung > F tabel α%, maka b beda nyata ($b \neq 0$).
- Jika F hitung < F tabel α%, maka b beda tidak nyata ($b = 0$).

Atau regresi (b) berpengaruh nyata atau tidak dengan melihat t hitung:
Standard error estimasi (S_e) :

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}{(n - k - 1)}},$$

Keterangan :

K = Jumlah variable bebas = 1

JKG = $\Sigma(Y - \overline{Y})^2$

$$\text{T hitung b} = \frac{b}{S_b}$$

$$Sb = \frac{X}{\sqrt{X^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{KTG}{\Sigma Xi - (\Sigma Xi)^2/n}}$$

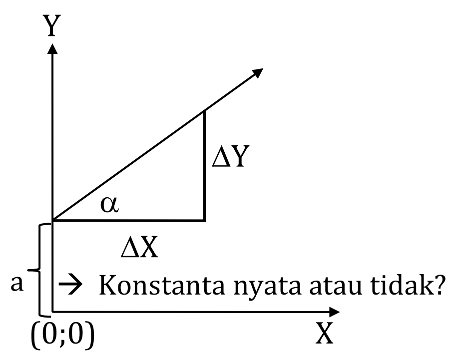
$$= \frac{S_e}{\sqrt{\Sigma(Xi - \overline{X})^2}}$$

T tabel α% (n-2)

Kriteria :

- Jika t hitung > t tabel α%, maka b beda nyata (b ≠ 0)
- Jika t hitung < t tabel α%, maka b tidak nyata (b = 0)

Pengukuran yang lain yaitu : Konstanta (a) nyata atau tidak? Kalau tidak nyata, a relatif berimpit dengan titik (0 ; 0).



$$S_\alpha = \frac{S_e}{\sqrt{\frac{\Sigma X_i^2}{n\,\Sigma(X_i - \dot{X})^2}}}$$

$$\text{T hitung} = \frac{a}{S\alpha}$$

T tabel 5% (n-2)

Kriteria :

- Jika t hitung > t tabel α%, maka a tidak berimpit dengan titik (0;0).
- Jika t hitung < t tabel α%, maka a berimpit dengan titik (0;0).

1.2.4. Uji tehadap koefisien regresi linier sederhana

Contoh 1.

Data hasil pengamatan dari pengaruh curah hujan (CH) (mm) terhadap panjang untaian padi (m) pada Tabel 1.10.

Tabel 1.10.
Pengamatan Curah Hujam (mm) (X) dan Panjang Untaian Padi (m) (Y)

No	X	Y	X^2	XY	Y^2
1	24,2	0,019	585,64	0,4598	0,000361
2	64,0	0,028	4.096,00	1,7920	0,000784
3	47,3	0,126	2.237,29	5,9598	0,015876
4	39,7	0,137	1.576,09	5,4389	0,018769
5	5,0	0,147	25,00	0,7350	0,021609
6	33,1	0,212	1.095,61	7,0172	0,044944
7	40,5	0,188	1.640,25	7,6140	0,035344
8	41,7	0,153	1.738,89	6,3801	0,023409
9	31,7	0,207	1.004,89	6,5619	0,042849
10	20,1	0,326	404,01	6,5526	0,106276
Total	347,3	1,543	14.403,67	48,5113	0,310221

Persamaan regresi linier sederhana : y = a + b x.

Langkah-langkah mencari parameter a dan b sebagai berikut.

Menghitung koefisien regresi (b) :

$$b = \frac{\Sigma\, X_i Y_i - \frac{(\Sigma X_i)(\Sigma X_i)}{n}}{\Sigma\, X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n}}$$

$$= \frac{48{,}5113 - \frac{347{,}3 \text{ x } 1{,}543}{10}}{14403{,}67 - \frac{(347{,}3)^2}{10}}$$

$$= \frac{48{,}5113 - 53{,}5884}{14.403{,}67 - 12.061{,}72}$$

$= -0{,}00216$

Menghitung konstanta atau intercept (a) :

a $= \Sigma Y/n - (b.\ (\Sigma X/n))$

$= 1{,}543/10 - (-0{,}00216\ (347{,}3/10))$

$= 0{,}229591$

Menghitung faktor koreksi dan jumlah kuadrat :

Menghitung faktor koreksi (FK) :

FK $= (\Sigma Y)^2/n$

$= (1{,}543)^2/10$

$= 0{,}238084$

Menghitung Jumlah Kuadrat total (Jkt) :

Jkt $= \Sigma Yi^2 - FK$

$= (0{,}019^2 + \ldots + 0{,}326^2) - 0{,}238084$

$= 0{,}072136$

Menghitung jumlah kuadrat regresi (JKR) :

JKR $= b\ (\Sigma XY - (\Sigma X.\Sigma Y)/n)$

$= -0{,}00216 \times (48{,}5113 - (347{,}3 \times 1{,}543)/10))$

$= 0{,}011006$

Menghitung Jumlah Kuadrat Galat (JKG) :

JKG $= JKt - JKR$

$= 0{,}072136 - 0{,}011006$

$= 0{,}061129$

Langkah-langkah menghitung derajad bebas (db) :
Db total (DBt) = n - 1
= 10 - 1
= 9

Db Regresi (DBR) = 1 (definisi)
DB Galat (DBG) = DBt - DBR
= 9 - 1
= 8

Menghitung kuadrat tengah (KT) :
KT Regresi (KTR) = JKR / DBR
= 0,011006 / 1
= 0,011006

KT Galat (KTG) = JKG / DBG
= 0,061129 / 8
= 0,007641

Langkah-langkah menghitung F hitung :
F hitung = KTR / KTG
= 0,011006 / 0,007641
= 1,440

Dari hasil perhitungan di atas dapat disusun analisis ragam pada Tabel 1.11 berikut.

Tabel 1.11.

Analisis Ragam terhadap Produksi Padi

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F. Hitung	F. Tabel α %
Regresi	1	0,011006	0,011006	1,440 ns	5,59
Galat	8	0,061129	0,004641		
Total	9	0,072100			

Keterangan :

ns = tidak berpengaruh nyata

F hitung (1,440) < F tabel 5% (5,32), maka variabel X tidak berpengaruh nyata terhadap variasi nilai variabel Y.

Menghitung besarnya pengaruh variabel X terhadap variasi variabel Y dengan menghitung koefisien determinasi (r^2) :

$$r^2 = \frac{\text{Jumlah kuadrat regresi (JKR)}}{\text{Jumlah kuadrat total (Jkt)}}$$

$$= \frac{0{,}011006}{0{,}072136}$$

$$= 0{,}1526 \text{ atau } 15{,}26\%$$

Pengujian terhadap intercept (a) dan koefisien regresi (b):

Sebenarnya tidak perlu dilakukan pengujian lanjut karena F hitung < F tabel.

Standard error estimasi (S_e) :

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{(n - k - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}061129}{(10 - 1 - 1)}}$$

$$= 0{,}08741$$

$$S_a = \sqrt{\frac{S_e}{\frac{\Sigma X_i^2}{n\ \Sigma(Xi - \dot{X})^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}08741}{\frac{14.403{,}67}{(10 \text{ x } 2.341{,}941)}}}$$

$$= 0{,}11145$$

$$\text{T hitung} = \frac{a}{S_a}$$

$$= \frac{0,22959}{0,11145}$$

$$= 2,059$$

T tabel 5% db (10-1-1) = 2,306

Kesimpulan :

T hitung (2.059) < t tabel (2.306), artinya konstanta dianggap berimpit dengan titik (0, 0).

Standard error regresi (S_b) :

$$S_b = \sqrt{\frac{S_e}{\Sigma(Xi - \overline{X})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,08741}{2.341,941}}$$

$$= 0,001806$$

$$T \text{ hitung} = \frac{b}{S_b}$$

$$= \frac{-0,00216}{0,01806}$$

$$= -1,195$$

T tabel 5% db (10-1-1) = 2,306

Kesimpulan :

T hitung (-1,195) > t tabel (-2,306), artinya koefisien regresi dapat dianggap sama dengan 0. Ho diterima dan Ha ditolak.

Contoh 2.

Penelitian motivasi kerja terhadap produktivitas tenaga kerja dalam pengolahan tanah pada Tabel 1.12.

Tabel 1.12.
Motivasi Kerja (X) terhadap Produktivitas Tenaga Kerja (Y)

No	X	Y	X^2	XY	Y^2
1	12	18	144	216	324
2	30	21	900	630	441
3	36	29	1.296	1.044	841
4	31	31	961	961	961
5	21	28	441	588	784
6	26	25	676	650	625
7	41	20	1.681	820	625
8	13	14	169	182	196
9	15	16	225	240	256
10	46	27	2.116	1.242	729
Total	271	229	8.609	6.573	5.557

Persamaan regresi linier sederhana : Y = a + bX

Mencari parameter a dan b sebagai berikut.

Menghitung koefisien regresi (b) :

$$x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}$$

$$= (12^2 + ... + 46^2) - \frac{271}{10}$$

$$= 8.609 – 7.344,1$$

$= 1.264,9$

$$y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}$$

$$= (18^2 + ... + 27^2) - \frac{(229)^2}{10}$$

$= 5.557 – 5.244,1$

$= 312,9$

$$xy = \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)^2}{n}$$

$$= \{(12 \text{ x } 18) + ...+ (46 \text{ x } 27)\} - \frac{(271 \text{ x } 229)^2}{10}$$

$= 6.573 – 6.205,9$

$= 367,1$

Menghitung koefisien regresi (b) :

$$b = \frac{xy}{X^2}$$

$$= \frac{367,1}{1.264,9}$$

$= 0,2902$

Perhitungan persamaan regresi :

$Y – \overline{Y} = b\ (X - \overline{X})$

$Y – 22,9 = 0,2902\ (X – 27,1)$

$Y – 22,9 = 0,2902\ X - (0,2902 \text{ x } 27,1)$

$Y – 22,9 = 0,2902\ X – 7,8649$

$$Y = 15{,}035 + 0{,}2902\ X$$

Koefisien determinasi :

$$r^2_{XY} = \frac{b\ \Sigma XY}{Y^2}$$

$$= \frac{0{,}2902 \text{ x } 367{,}1}{312{,}9}$$

$$= 0{,}3404$$

Koefisien korelasi :

$$r_{XY} = \sqrt{r^2_{XY}}$$

$$= \sqrt{0{,}3404}$$

$$= 0{,}5835$$

$$\text{F hitung} = \frac{r_{XY}\ (n-k-1)}{\frac{(1 - r^2_{XY})}{k}}$$

$$= \frac{0{,}5835\ (10-1-1)}{\frac{(1 - 0.3404)}{1}}$$

$$= \frac{2{,}7239}{0{,}6595}$$

$$= 4{,}1302$$

F tabel 5% db (1 ; 8) = 5,59

Atau cara lain, berikut:

Perhitungan jumlah kuadrat (JK) :
JK Galat (JKG) :
JKG= $(1 - r^2_{XY})\ (y^2)$
= (1 - 0,3404) (312,9)
= 0,6595 x 312,9
= 206,36

JK Regresi (KTR) :
JKR= $r^2_{XY}\ (y^2)$
= 0,3404 (312,9)
= 106,53

Perhitungan kuadrat tengah (KT) :

KT Galat (KTG) = JKG / (n - k - 1)
= 206,360 / (10 - 1 - 1)
= 25,795

KT Regresi (KTR) = JKR / k
= 106,530 / 1
= 106,53

F hitung regresi = KTR / KTG
= 106,1302 / 25,795
= 4,1302

Dari hasil perhitungan di atas dapat disusun analisis ragam sebagai berikut.

Tabel 1.13.
Analisis Ragam terhadap Produktivitas Tenaga Kerja dalam Pengolahan Tanah

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	F tabel 5%
Regresi	1	106,53	106,53	4,130 ns	5,59
Galat	8	206,36	25,79		
Total	9	312,89			

Keterangan :
ns = tidak berpengaruh nyata

F hitung (1,440) < F tabel 5% (5,32), maka variabel X tidak berpengaruh nyata terhadap variasi nilai variabel Y.

Pengujian terhadap intercept (a) dan koefisien regresi (b):
(Sebenarnya tidak perlu)

Standard error estimasi (S_e) :

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{(n-k-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{206.36}{(10-1-1)}}$$

$$= \; 5{,}0788$$

$$S_a = \sqrt{\frac{S_e}{\frac{\Sigma X_i^2}{n\,\Sigma(Xi - \bar{X})^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5{,}0788}{\frac{8.609}{(10 \times 8.693{,}01)}}}$$

$$= 16{,}0605$$

$$\text{T hitung} = \frac{a}{S_a}$$

$$= \frac{0{,}229591}{16{,}06057}$$

$$= 0{,}0143$$

T tabel 5% db (10-1-1) = 2,306

Kesimpulan :

T hitung (0,143) < t tabel (2,306), artinya konstanta dianggap berimpit dengan titik koordinat (0, 0).

Standard error regresi (S_b) :

$$S_b = \sqrt{\frac{S_e}{\Sigma(Xi - \dot{X})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5{,}0788}{8.693{,}01}}$$

$$= 0{,}05447$$

$$\text{T hitung} = \frac{b}{S_b}$$

$$= \frac{0{,}29022}{0{,}05447}$$

$$= 3{,}712$$

T tabel 5% db (8) = 2,0323

Kesimpulan :

T hitung (3,712) > t tabel (2,306), artinya koefisien regresi dianggap tidak sama dengan 0.

Contoh 3.

Penelitian pengaruh dosis NPK (g/rumpun)terhadap produksi padi diperoleh data seperti pada Tabel 1.14.

Tabel 1.14.
Pengaruh Dosis NPK (g/rumpun) terhadap Produksi Padi (ton)

No	Dosis NPK (g/rumpun) X	Prod. Padi (ton/ha) Y	X^2	XY	Y^2
1	1,00	2,70	1,00	2,70	7,29
2	1,25	2,70	1,56	3,38	7,29
3	1,50	2,70	2,25	4,05	7,29
4	1,75	2,80	3,06	4,90	7,84
5	2,00	2,87	4,00	5,74	8,24
6	2,25	2,87	5,06	6,46	8,24
Total	9,75	16,64	16,94	27,22	46,18

Tabel 1.15.
Metode Abreviate Doollitle Dipersingkat

X'X		X'Y	I (Matriks Identitas)	
b_0	b_1			
n	ΣX	ΣY	COO	C01
	ΣX^2	ΣXY	C01	C11
6	9,7500	16,6400	1	0
	16,9375	27,2225	0	1
6	9,7500	16,6400	1	0
1	1,6250	2,7733	0,1667	0
	1,0938	0,1825	-1,6250	1
	1	0,1669	-1,4857	0,9143

Berdasarkan Tabel 1.15, maka dapat dilakukan perhitungan berikut.

Perhitungan Jumlah Kuadrat (JK) :

$\Sigma Y^2 = 46,1838$

JK Konstanta (Jkb_0) ;

= 16,6400 x 2,7733

= 46,14827

JK Regresi (Jkb_1) :

= 0,1825 x 0,1669

= 0,03045

JK total (JKt) = ΣY^2 - JK(b_0)

= 46,18380 – 46,14827

= 0,03553

JK Galat (JKG) = JKt - JK(b_1)

= 0,03553 – 0,03045

= 0,00508

Hasil perhitungan di atas dapat disusun analisis ragam pada Tabel 1.16 berikut.

Tabel 1.16.

Analisis Ragam terhadap Produktivitas Padi

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	F tabel 5%
Regresi	1	0,03045	0,03045	23,968 *	7,71
Galat	4	0,00508	0,00127		
Total	5	0,03553			

Keterangan :

* = berpengaruh nyata

F hitung = 23,968, > F tabel 5% db (1 ; 4) = 7,71, maka variabel X berpengaruh nyata terhadap variasi nilai variabel Y.

Menghitung besarnya pengaruh variabel X terhadap variasi variabel Y dengan menghitung koefisien determinasi (r^2) :

$$r^2 = \frac{\text{Jumlah kuadrat regresi (JKR)}}{\text{Jumlah kuadrat total (Jkt)}}$$

$$= \frac{0{,}03045}{0{,}03553}$$

$$= 0{,}8569 \text{ atau } 85{,}69\%$$

Perhitungan terhadap konstanta (b_0) dan koefisien regresi (b_1):

$$1 \times b_1 = 0{,}1669$$
$$b_1 = 0{,}1669$$

$$(1 \times b_0) + (1{,}6250 \times b_1) = 2{,}7733$$
$$b_0 + (1{,}6250 \times 0{,}1669) = 2{,}7733$$
$$b_0 = 2{,}5022$$

Sehingga diperoleh persamaan regresi :

$$Y = 2{,}5022 + 0{,}1669\ X.$$

Pengujian terhadap konstanta dan koefisien regresi

Nilai kovarian :

C_{00} = (1 x 0,1667) + (-1,6250 x -1,4857)
= 2,5810

C_{11} = (0 x 0) + (1 x 0,9143)
= 0,9143

Standard error b_0 :

$$S_{bo} = \sqrt{C_{00} \text{ x KTG}}$$

$$= \sqrt{2{,}581\ x\ 0{,}0013}$$

$$= 0{,}0573$$

$$\text{T hitung} = \frac{b_0}{S_{b0}}$$

$$= \frac{2{,}5022}{0{,}0573}$$

$$= 43{,}696$$

Standard error b_1 :

$$S_{b1} = \sqrt{C_{11} \text{ x KTG}}$$

$$= \sqrt{0{,}9143\ x\ 0{,}0013}$$

$$= 0{,}0341$$

$$\text{T hitung} = \frac{b_1}{S_{b1}}$$

$$= \frac{0{,}1669}{0{,}0341}$$

$$= 4{,}895$$

T tabel 5% db (4) = 2,776

Kesimpulan :

T hitung (4,895) > t tabel (2,776), artinya koefisien regresi dianggap tidak sama dengan 0 ($b \neq 0$). H_0 ditolak dan Ha diterima.

BAB 2

ANALISIS KORELASI DAN REGRESI LINIER BERGANDA

2.1. Korelasi Linier Berganda

2.1.1. Pendahuluan

Penelitian berjudul "Pengaruh pertumbuhan tanaman padi pada musim tanam pertama dan kedua terhadap pertumbuhan tanaman padi pada musim tanam 3".

Adapun sebagai indikatornya yaitu parameter tinggi tanaman padi. Pengamatan tinggi tanaman dilakukan pada umur 3 minggu setelah tanam (MST). Pengamatan dibagi menjadi 3 musim tanam yaitu musim tanam 1, 2 dan 3.

Tahap pengambilan data :

Tinggi tanaman musim tanam 1 sebagai X_1,
Tinggi tanaman musim tanam 2 sebagai X_2
Tinggi tanaman musim tanam 3 sebagai Y.

Permasalahan :

a. Ingin diketahui apakah ada hubungan antara tinggi tanaman pada musim tanam 1, 2 dan 3.
b. Apakah ada pengaruh musim tanam 1 dan 2 terhadap pertumbuhan tinggi tanaman padi pada musim tanam 3.

Data pengamatan selama tiga musim diperoleh pada Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1.
Data Pengamatan Tinggi Tanaman Padi pada Umur 3 MST Musim Tanam 1, 2 dan 3.

No	Musim Tanam 1 X_1	Musim Tanam 2 X_2	Musim Tanam 3 Y
1	45	35	39
2	30	32	34
3	38	26	25
4	44	40	38
5	50	47	43
6	45	40	39
7	47	46	40
8	48	46	41
9	45	50	39
10	41	36	36
11	46	50	39
12	42	36	33
13	45	44	38
14	48	47	42
15	36	26	31
16	41	36	35
17	44	41	37
18	44	43	38
19	48	46	42
20	36	33	33
21	44	44	38
22	47	46	40
23	45	45	39
24	45	46	39
25	39	36	36
26	50	44	44
27	36	31	31
28	42	38	36
29	47	46	40
30	47	47	41
Jumlah	1305	1223	1126

Data hasil pengamatan Tabel 2.1 di atas, kemudian diolah sesuai dengan kebutuhan analisis. Hasil pengolahan data pada Tabel 2.2 dibutuhkan jumlah dari : ΣX_1 ; ΣX_2 ; ΣY ; ΣX_1^2 ; ΣX_1X_2 ; ΣX_1Y ; ΣX_2^2 ; ΣX_2Y dan ΣY^2.

Tabel 2.2.
Data Jumlah, Jumlah Hasil Kali dan Jumlah Kuadrat.

No	X_1	X_2	Y	X_1^2	X_1X_2	X_1Y	X_2^2	X_2Y	Y^2
1	45	35	39	2025	1575	1755	1225	1365	1521
2	30	32	34	900	960	1020	1024	1088	1156
3	38	26	25	1444	988	950	676	650	625
4	44	40	38	1936	1760	1672	1600	1520	1444
5	50	47	43	2500	2350	2150	2209	2021	1849
6	45	40	39	2025	1800	1755	1600	1560	1521
7	47	46	40	2209	2162	1880	2116	1840	1600
8	48	46	41	2304	2208	1968	2116	1886	1681
9	45	50	39	2025	2250	1755	2500	1950	1521
10	41	36	36	1681	1476	1476	1296	1296	1296
11	46	50	39	2116	2300	1794	2500	1950	1521
12	42	36	33	1764	1512	1386	1296	1188	1089
13	45	44	38	2025	1980	1710	1936	1672	1444
14	48	47	42	2304	2256	2016	2209	1974	1764
15	36	26	31	1296	936	1116	676	806	961
16	41	36	35	1681	1476	1435	1296	1260	1225
17	44	41	37	1936	1804	1628	1681	1517	1369
18	44	43	38	1936	1892	1672	1849	1634	1444
19	48	46	42	2304	2208	2016	2116	1932	1764
20	36	33	33	1296	1188	1188	1089	1089	1089
21	44	44	38	1936	1936	1672	1936	1672	1444
22	47	46	40	2209	2162	1880	2116	1840	1600
23	45	45	39	2025	2025	1755	2025	1755	1521
24	45	46	39	2025	2070	1755	2116	1794	1521
25	39	36	36	1521	1404	1404	1296	1296	1296
26	50	44	44	2500	2200	2200	1936	1936	1936
27	36	31	31	1296	1116	1116	961	961	961
28	42	38	36	1764	1596	1512	1444	1368	1296
29	47	46	40	2209	2162	1880	2116	1840	1600
30	47	47	41	2209	2209	1927	2209	1927	1681
Jml.	1305	1223	1126	57401	53961	49443	51165	46587	42740

Hasil analisis :
$\Sigma n = 30$; $\Sigma X_1 = 1.305$; $\Sigma X_2 = 1.223$; $\Sigma Y = 1.126$; $\Sigma X_1^2 = 57.401$; $\Sigma X_1X_2 = 53.961$; $\Sigma X_1Y = 49.443$; $\Sigma X_2^2 = 51.165$; $\Sigma X_2Y = 46.587$; dan $\Sigma Y^2 = 42.740$.

2.1.2. Korelasi Linier Sederhana, Parsial dan Berganda

Pada Bab 1 di depan telah dibahas tentang korelasi linier sederhana yang hanya berlaku pada data yang mengikuti distribusi normal bivariasi (*bivariate normal distribution*), maka korelasi berganda maupun parsial digunakan untuk data yang terdiri dari lebih dua variabel dan mengikuti distribusi normal multivariasi (*multivariate normal distribution*) yang merupakan model dasar dalam studi korelasi.

2.1.2.1. Korelasi Linier Sederhana

Analisis korelasi dilakukan antar masing-masing variabel yaitu antara : X_1 dan X_2, X_1 dan Y, serta X_2 dan Y,

Korelasi antara variabel X_1 dan X_2 :

$$r_{X_1X_2} = \frac{n\,\Sigma X_1X_2 - \Sigma X_1 \Sigma X_2}{\sqrt{n\,\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2}\,\sqrt{n\,\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2}}$$

$$= \frac{(30 \times 53.961) - (1.305 \times 1.223)}{\sqrt{(30 \times 57.401) - (1.305)^2}\,\sqrt{(30 \times 51.165) - (1.223)^2}}$$

$$= \frac{1.618.830 - 1.596.015}{\sqrt{19.005}\,\sqrt{39.221}}$$

$$= 0,8357$$

Korelasi antara variabel X_1 dan Y :

$$r_{X_1Y} = \frac{n\,\Sigma X_1Y - \Sigma X_1 \Sigma Y}{\sqrt{n\,\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{(30 \text{ x } 49.443) - (1.305 \text{ x } 1.126)}{\sqrt{(30 \text{ x } 57.401) - (1.305)^2}\ \sqrt{(30 \text{ x } 42.740) - (1.126)^2}}$$

$$= \frac{1.483.290 - 1.469.430}{\sqrt{19.005}\ \sqrt{14.324}}$$

$$= 0,8400$$

Korelasi antara variabel X_2 dan Y :

$$r_{X_2Y} = \frac{n\,\Sigma X_2Y - \Sigma X_2 \Sigma Y}{\sqrt{n\,\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{(30 \text{ x } 46.587) - (1.223 \text{ x } 1.126)}{\sqrt{(30 \text{ x } 51.165) - (1.223)^2}\ \sqrt{(30 \text{ x } 42.740) - (1.126)^2}}$$

$$= \frac{1.397.610 - 1.377.098}{\sqrt{39.221}\ \sqrt{14.324}}$$

$$= 0,8654$$

2.1.2.2. Korelasi Parsial

Pada model-model normal multivariasi, setiap variabel memiliki hubungan regresi linier dengan variabel yang lain, dimana simpangannya (*deviation*) mengikuti distribusi normal. Apabila dimiliki 3 buah variabel, maka akan dimiliki 3 buah korelasi sederhana r_{X1X2}, r_{X1Y} dan r_{X2Y}, sedangkan yang dimaksud korelasi parsial $r_{X1X2.Y}$ ialah korelasi anatara variabel X_1 dan X_2 pada kondisi variabel Y konstan. Jadi hanya variabel X_1 dan X_2 yang berperanan dalam korelasi tersebut. Pada model normal multivariasi, maka besarnya $r_{X1X2.Y}$ akan sama untuk setiap harga pada variabel Y.

Rumus umum korelasi parsial :

$$r_{X_1Y\_X_2X_{3\ldots k}} = \frac{r_{X_1Y.23\ldots(k-1)} - (r_{Yk.23\ldots(k-1)})\,(r_{X_1k.23\ldots(k-1)})}{\sqrt{(1-(r_{Yk23\ldots(k-1)})^2) - (1-(r_{X_1k23\ldots(k-1)})^2)}}$$

Pengujian hipotesisnya dapat dilakukan secar langsung melalui tabel koefisien korelasi pada tingkat 5% dan 1%. Besarnya derajad bebas (DB) = (n-3), karena ada 3 buah variabel.

Korelasi parsial antara X_1 dan Y, X_2 dianggap konstan

$$r_{X_1Y\_X_2} = \frac{r_{X_1Y} - (r_{X_2Y} * r_{X_1X_2})}{\sqrt{(1-(r_{X_2Y})^2) - (1-(r_{X_1X_2})^2)}}$$

$$= \frac{0{,}8400 - (0{,}8654 \text{ x } 0{,}8356)}{\sqrt{(1-(0{,}8654)^2) - (1-(0{,}8356)^2)}}$$

$$= \frac{0{,}1168}{0{,}2752}$$

$$= 0{,}4245$$

Korelasi parsial antara X_2 dan Y, X_1 dianggap konstan

$$r_{X_2Y\_X_1} = \frac{r_{X_2Y} - (r_{X_1Y} * r_{X_1X_2})}{\sqrt{(1 - (r_{X_1Y})^2) - (1 - (r_{X_1X_2})^2)}}$$

$$= \frac{0{,}8654 - (0{,}8400 \text{ x } 0{,}8356)}{\sqrt{(1 - (0{,}8400)^2) - (1 - (0{,}8356)^2)}}$$

$$= \frac{0{,}1634}{0{,}2979}$$

$$= 0{,}5484$$

R tabel 5% db (30 - 3) = 0,498

Kesimpulan :

Karena korelasi parsial hitung $r_{YX1.X2}$ = 0,2742 dan $r_{YX2.X1}$ = 0,3595 < r tabel 5% db (27) = 0,498, maka hubungan antara X_1 terhadap Y dan X_2 terhadap Y tidak beda nyata (*non significant*).

Asumsi yang digunakan dalam analisis korelasi parsial (*partial coefficient correlation*) adalah :

1. Sampel yang digunakan mengikuti distribusi multivariasi normal.
2. Semua pengamatan bersifat acak (random)
3. Tidak dibedakan antara variabel bebas dan tidak bebas

Asumsi ke-3 hanya berlaku apabila tidak dilakukan analisis regresi, jadi dianggap terdapat kedudukan yang sama antara variabel bebas dan tidak bebas.

2.1.2.3. Korelasi Berganda

Analisis korelasi parsial adalah ukuran saling ketergantungan antara satu variabel dengan variabel yang lainnya. Sebaliknya koefisien korelasi berganda R digunakan untuk menguji derajad keeratan satu variabel Y dengan lebih dari satu variabel lainnya.

Jadi korelasi berganda antara Y dengan X_1, X_2, ...,X_k adalah korelasi sederhana anatara Y dengan regresi liniernya $b_1X_1 + b_2X_2 + ... + b_kX_k$. Mengingat sukarnya untuk membayangkan arti dari korelasi berganda ini, biasanya R dinyatakan dalam bentuk kuadratnya yaitu R^2 = koefisien determinasi (*coefficient of determination*) atau koefisien penentu. R^2 yaitu suatu nilai untuk mengukur besarnya sumbangan (*share*) dari beberapa variabel X terhadap variasi (naik turunnya) Y.

$$R^2 = \frac{\text{JK Regresi}}{\text{JK Total}}$$

Jadi :

$$R = \sqrt{R^2}$$

Keterangan :

R = Koefisien korelasi berganda

R^2 = Koefisien determinasi

Bentuk uji hipotesis R^2 sama dengan pengujian hipotesis untuk:

Ho : $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_k$, dengan menggunakan uji F.

Keterangan :

$$F \text{ hitung} = \frac{(n-k-1)\, R^2}{k\,(1-R^2)} \text{ dengan DB} = (k\ ;\ n\text{-}k\text{-}1)$$

Rumus umum korelasi linier berganda :

$$r_{Y\_X_1X_2} = \sqrt{\frac{r^2_{X1Y} + r^2_{X2Y} - 2\,(r_{X_1Y} \times r_{X_2Y} \times r_{X_1X_2}}{1 - r^2_{X1X2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}8400^2 + 0{,}8654^2 - 2\,(0{,}8400 \times 0{,}8654 \times 0{,}8356)}{1 - 0{,}8356^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}4545 - 2\,(0{,}6074)}{1 - 0{,}6982}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}2396}{0{,}3017}}$$

$$= 0{,}8912$$

Kesimpulan :

Artinya besarnya koefisien korelasi ganda antara variabel bebas X_1 dan X_2 terhadap Y sebesar 0,8912.

Data Tabel 2.1 di atas dapat dianalisis menggunakan paket program SPSS versi 23. Hasil analisis yang diperoleh sama persis dengan cara perhitungan manual.

1. Analisis korelasi linier sederhana

Tabel 2.3. Analisis Korelasi antar Variabel X1, X2 dan Y

Correlations

		X_1	X_2	Y
X_1	Pearson Correlation	1	.836**	.840**
	Sig. (2-tailed)		.000	.000
	N	30	30	30
X_2	Pearson Correlation	.836**	1	.865**
	Sig. (2-tailed)	.000		.000
	N	30	30	30
Y	Pearson Correlation	.840**	.865**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	
	N	30	30	30

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Kesimpulan :

1. Tabel 2.3 di atas menunjukkan korelasi antara X_1 dan X_2 sebesar 0,836 dengan probabiltas signifikansi 0,000 < probabilitas 0,05, maka korelasi nyata positif.
2. Korelasi antara X_1 dan Y sebesar 0,840 dengan probabiltas signifikansi 0,000 < probabilitas 0,05, maka korelasi nyata positif.
3. Korelasi antara X_2 dan Y sebesar 0,865 dengan probabiltas signifikansi 0,000 < probabilitas 0,05, maka korelasi nyata positif.

2. Korelasi parsial antara X_1 dan Y, X_2 dianggap konstan

Tabel 2.4. Analisis Korelasi Parsial antar Variabel X_1 dan Y

Correlations

Control Variables			X1	Y
X2	X1	Correlation	1.000	.425
		Significance (2-tailed)	.	.022
		Df	0	27
	Y	Correlation	.425	1.000
		Significance (2-tailed)	.022	.
		Df	27	0

Kesimpulan :

Tabel 2.4 menunjukkan bahwa korelasi parsial antara X_1 dan Y dan dianggap X_2 konstan sebesar 0,425 dengan probabilitas signifikansi 0,022 < probalitas tabel 0,05, maka korelasi antara X_1 dan Y nyata positif.

3. Korelasi parsial antara X_2 dan Y, X_1 dianggap konstan

Tabel 2.5. Analisis Korelasi Parsial antar Variabel X_2 dan Y

Correlations

Control Variables			X2	Y
X1	X2	Correlation	1.000	.548
		Significance (2-tailed)	.	.002
		Df	0	27
	Y	Correlation	.548	1.000
		Significance (2-tailed)	.002	.
		Df	27	0

Kesimpulan :

Tabel 2.5 menunjukkan bahwa korelasi parsial antara X_2 dan Y dan dianggap X_1 konstan sebesar 0,548 dengan probabilitas signifikansi 0,002 < probalitas tabel 0,05, maka korelasi antara X_2 dan Y nyata positif.

4. Koefisien korelasi berganda

Tabel 2.6. Analisis Korelasi Berganda

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.891[a]	.794	.779	1.90779

a. Predictors: (Constant), X_2, X_1

Kesimpulan :

Tabel 2.6 menunjukkan bahwa koefisien korelasi berganda sebesar 0,891 dan koefisien determinasi merupakan kuadrat dari koefisien korelasi yaitu $(0{,}891)^2$ yaitu 0,794. Koefisien determinasi ini menjelaskan bahwa variasi varibel Y di pengaruhi oleh variabel X_1 dan X_2 sebesar 79,4%.

2.2. Regresi Linier Berganda

2.2.1. Model Umum Regresi Linier Berganda

Model regresi linier sederhana telah dibahas pada Bab 1 di depan. Model tersebut dianggap sederhana karena hanya membahas pengaruh satu varibel (X) dengan satu variabel yang lain (Y). Pada analisis regresi variabel tersebut dinamakan variabel bebas (*independent variable*) dan variabel terikat (*dependent variable*). Pengaruh linier dari variabel bebas (X) terhadap variabel terikat (Y) dengan menggunakan persamaan regresi linier sederhana yaitu : Y = a + b X.

Pada analisis regresi linier berganda, variabel bebas (X) yang digunakan lebih dari satu, misalnya X_1, X_2, X_3, ..., X_k. Satu variabel terikat (Y) dipengaruhi oleh beberapa variabel bebas. Pengaruh linier dapat dinyatakan dalam persamaan regresi linier berganda yaitu :

Bentuk struktural :

$$Y_i = b_o + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} + ... + b_kX_{ki} + Ui$$

Bentuk dasar :

$$Y_i = b_o + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} + ... + b_kX_{ki}$$

Persamaan normal :

$$\begin{array}{l}
bo\ n + b_1\Sigma X_{1i} + b_2\Sigma X_{2i} + b_3\Sigma X_{3i} + ... + b_k\Sigma X_{ki} = \Sigma Yi \\
b_0\Sigma X_{1i} + b_1\Sigma X_{1i}^2 + b_2\Sigma X_{1i}X_{2i} + b_3\Sigma X_{1i}X_{3i} + ... + b_k\Sigma X_{1i}X_{ki} = \Sigma X_{1i}Y \\
b_0\Sigma X_{1i} + b_1\Sigma X_{1i}X_{2i} + b_2\Sigma X_{2i}^2 + b_3\Sigma X_{2i}X_{3i} + ... + b_k\Sigma X_{1i}X_{ki} = \Sigma X_{2i}Y \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
b_0\Sigma X_{ki} + b_1\Sigma X_{ki}X_{1i} + b_2\Sigma X_{ki}X_{2i} + b_3\Sigma X_{ki}X_{3i} + ... + b_{ki}\Sigma X_{ki}^2 = \Sigma X_{ki}Y
\end{array}$$

Keterangan :

Y = Data hasil pengamatan variabel Y (Y observasi)
X_1 s/d X_k = Jumlah k Variabel bebas X
b_o = Konstanta (a = intercept)
b_1 s/d b_k = Koefisien regresi dari variabel X_1 s/d X_k
U_i = Gangguan ke-i

Jika dalam suatu pengamatan yang terdiri dari i sampel atau responden, maka persaman tersebut dapat dikembangkan menjadi :

$$Y_i = b_o + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} + ... + b_kX_{ki},\ i = 1, 2, 3, ...,n$$

Berdasarkan persamaan di atas, maka terdapat beberapa nilai koefisien yaitu b_o, b_1, b_2, b_3, ..., b_k. Untuk mnenghitung besarnya koefisien tersebut dapat digunakan 3 metode yaitu metode jumlah kuadrat terkecil (*least square method*) atau metode determinasi, metode substitusi dan metode Abreviate Doolittle yang dipersingkat.

2.2.2. Metode jumlah kuadrat terkecil

Persamaan normal untuk menghitung koefisien b_o, b_1, b_2, b_3, ..., b_k dengan metode jumlah kuadrat terkecil yaitu :

$$
\begin{array}{llllll}
B_0\, n & + b_1\Sigma X_1 & + b_2\Sigma X_2 & + b_3\Sigma X_3 & + ... + b_k\Sigma X_k & = \Sigma Y \\
b_0\Sigma X_1 & + b_1\Sigma X_1^2 & + b_2\Sigma X_1X_2 & + b_3\Sigma X_1X_3 & + ... + b_k\Sigma X_1X_k & = \Sigma X_1Y \\
b_0\Sigma X_1 & + b_1\Sigma X_1X_2 & + b_2\Sigma X_2^2 & + b_3\Sigma X_2X_3 & + ... + b_k\Sigma X_1X_k & = \Sigma X_2Y \\
: & : & : & : & : & : \\
: & : & : & : & : & : \\
b_0\Sigma X_k & + b_1\Sigma X_kX_1 & + b_2\Sigma X_kX_2 & + b_3\Sigma X_kX_3 & + ... + b_k\Sigma X_k^2 & = \Sigma X_kY
\end{array}
$$

Jika persamaan tersebut dipecahkan, maka akan diperoleh nilai b_0, b_1, b_2, b_3, ..., b_k. Kemudian dapat dibentuk persamaan regresi linier berganda. Apabila persamaan regresi sudah diperoleh, maka dapat diramalkan nilai Y dengan syarat kalau nilai X_1, X_2, X_3, ..., X_k sebagai variabel bebas sudah diketahui.

Jika jumlah variabel bebas yang digunakan ada 2 (k = 2, yaitu X_1 dan X_2 dan satu varibel terikat Y, maka persamaan menjadi : $Y = b_0 +$

$b_1X_1 + b_2X_2$. Nilai b_0, b_1, dan b_2 dihitung dengan persamaan normal sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&B_0\, n + b_1\Sigma X_1 + b_2\Sigma X_2 + b_3\Sigma X_3 + \ldots + b_k\Sigma X_k = \Sigma Y \\
&b_0\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1^2 + b_2\Sigma X_1X_2 + b_3\Sigma X_1X_3 + \ldots + b_k\Sigma X_1X_k = \Sigma X_1Y \\
&b_0\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1X_2 + b_2\Sigma X_2^2 + b_3\Sigma X_2X_3 + \ldots + b_k\Sigma X_1X_k = \Sigma X_2Y
\end{aligned}
$$

Sehingga terdapat tiga persamaan dengan tiga variabel yang tak diketahui nilainya, yaitu b_0, b_1, b_2. Untuk memecahkan persoalan tersebut maka persamaan dapat dinyatakan dalam persamaan matriks sebagai berikut.

$$
\underbrace{\begin{vmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1X_2 & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}}_{B}
=
\underbrace{\begin{vmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1Y \\ \Sigma X_2Y \end{vmatrix}}_{H}
$$

Keterangan :

A = Matriks (diketahui dari perhitungan di atas)

H = Vektor kolom (diketahui dari perhitungan di atas)

B = Vektor kolom (tidak diketahui) dapat dicari dengan A B = H, atau

B = A^{-1} H, dimana A^{-1} = kebalikan (invers) dari A

Berdasarkan perhitungan data Tabel 2.2 di atas, maka diketahui matrik setengah tangkup berikut.

Matriks ordo 3 x 3 setengah tangkup :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} n = 30 & \Sigma X_1 = 1305 & \Sigma X_2 = 1223 \\ & \Sigma X_1^2 = 57401 & \Sigma X_1X_2 = 53961 \\ & & \Sigma X_2^2 = 51165 \end{vmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{vmatrix} \Sigma Y = 1126 \\ \Sigma X_1Y = 49443 \\ \Sigma X_2Y = 46587 \end{vmatrix}}_{H}$$

2.2.3. Uji terhadap koefisien regresi

2.2.3.1. Metode Abreviate Doolittle dipersingkat

Nilai B dapat dicari dengan menggunakan metode determinan, substitusi akan tetapi lebih mudah bila digunakan metode Abreviate Doolittle.

Metode Doolittle ini diperkenalkan oleh M.H. Doolittle, seorang ahli geodesi di Amerika Serikat pada tahun 1878. Metode ini banyak digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan normal dalam analisis regresi. Metode ini dapat dipergunakan untuk menyelesaikan k buah persamaan, dimana k dapat mengambil sembarang nilai, misalnya 10, 20, 30, ..., 200 dan seterusnya.

Sebenarnya metode ini memberikan banyak keuntungan, dengan mudah dapat dilakukan pembalikan matriks setangkup (X’X = A), dan juga dapat dihitung berbagai jumlah kuadrat (JK) untuk menguji hipotesis tentang parameter model yang diidentifikasi. Dengan metode Doolittle dapat dipergunakann untuk memperoleh :

1. Koefisien penduga parameter model regresi (koefisien regresi b)
2. Jumlah kuadrat yang berkaitan dengan setiap koefisien regresi.
3. Ragam dugaan dari setiap regresi, KT Galat
4. Peragam dugaan diantara pasangan koefisien regresi yang ada, cov (b_i, b_j).

5. Elemen-elemen dari invers matriks (X'X), jadi dengan menggunakan metode Doolittle akan diperoleh elemen-elemen $(X'X)^{-1}$.

Sebagai ilustrasi, terdapat masalah mengenai penyelesaian analisis regresi yang terdiri dari 2 variabel peramal seperti di atas, maka model regresi dengan 2 variabel peramal adalah :

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + Ui$$

Model penduga berdasarkan metode kuadrat terkecil adalah :

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i}$$

Dimana koefisien-koefisien b_i (i = 0, 1, 2) akan ditentukan melalui penyelesaian persamaan normal dengan k = 2.

$$A\ B = H$$
$$(X'X)\ B = X'Y$$

Keterangan :

$A = X'X$

$H = X'Y$

$B = (b_0, b_1, b_2)$

Maka penyelesaian berdasarkan persamaan normal menjadi :

$$B = (X'X)^{-1}\ X'Y$$
$$= A^{-1}\ H$$

Penyelesaian langkah maju (*forwad solution*) menggunakan metode Doolittle untuk masalah tersebut dapat diikuti dalam tabel berikut. Pada tabel tersebut melukiskan langkah demi langkah dari analsis regresi berganda.

Tabel 2.7 matrik setengah tangkup di bawah, terlihat sebagai matriks berordo 3 x 3.

Pada kolom I :

Diisi dengan angka-angka yang berkaitan dengan matriks (X'X), karena matriks ini bersifat bujur sangkat (setangkup), dimana elemen-elemen pada baris ke-i sama dengan ke-j (i=j), maka cukup memasukan elemen-elemen dari matriks segitiganya.

Pada kolom II :

Diisi dengan elemen-elemen dari vektor X'Y,

Pada kolom III :

Diisi dengan matriks identitas

Pada Kolom IV :

Merupakan kolom cheking yaitu total elemen-elemen pada baris yang bersangkutan harus cocok dengan hasil perhitungan dalam baris tersebut. Apabila hasil perhitungan total elemen-elemen pada baris yang bersangkuta tidak sama dengan angka dalam kolom penguji, maka terjadi kesalahan pada pengolahan baris itu, sehingga perlu diperiksa kembali aturan pengolahannya. Fungsi kolom penguji untuk mencegah terjadinya kesalahan dalam setiap pengolahan baris.

Besarnya inversi dari matriks A yaitu $A^{-1} = C$, didapat dari perhitungan elemen-elemen pada kolom III yaitu :

$$C_{00} = \sum_{i=1}^{3} B_{i5}\, C_{i5} \qquad C_{11} = \sum_{i=1}^{3} B_{i6}\, C_{i6} \qquad C_{22} = \sum_{i=1}^{3} B_{i7}\, C_{i7}$$

$$C_{01} = \sum_{i=1}^{3} B_{i5}\, C_{i6} \qquad C_{02} = \sum_{i=1}^{3} B_{i5}\, C_{i7} \qquad C_{12} = \sum_{i=1}^{3} B_{i6}\, C_{i7}$$

Sehingga bentuk matriks A^{-1} atau C-nya adalah :

$$C = A^{-1} = \begin{vmatrix} C00 & C01 & C02 \\ & C11 & C12 \\ & & C22 \end{vmatrix}$$

Besarnya koefisien-koefisien regresi b_0, b_1, b_2 diperoleh dari elemen-elemen pada baris B_5, B_7 dan B_9 kolom II.

Langkah-langkah mencari koefisien b_0, b_1 dan b_2 dapat digunakan metode Abreviate Doolittle.

Tabel 2.7.

Metode Abreviate Doolittle Dipesingkat

Langkah Penyele-Saian	Baris	Kolom I X'X			Kolom II X'Y	Kolom III Matriks Identitas (I)			Kolom IV Kolom Penguji
		b_0	b_1	b_2					
		1	2	3	4	5	6	7	
		Σn	Σx_1	Σx_2	Σy	C_{00}	C_{01}	C_{02}	
			Σx_1^2	$\Sigma x_1 x_2$	$\Sigma x_1 y$	C_{01}	C_{11}	C_{12}	?
				Σx_2^2	$\Sigma x_2 y$	C_{02}	C_{12}	C_{22}	
	B_1	30	1305,00	1223,00	1126,00	1	0	0	
	B_2		57401,00	53961,00	49443,00	0	1	0	
	B_3			51165,00	46587,00	0	0	1	
B_{4i}	B_4	30	1305,00	1223,00	1126,00	1	0	0	
B_{4i}/B_{41}	B_5	1	43,50	40,7667	37,5333	0,03333	0	0	
$B_{2i}-B_{42}.B_{4i}$	B_6		633,50	760,50	462,00	-43,00	1	0	
B_{6i}/B_{62}	B_7		1	1,2005	0,72928	-0,06866	0,001578	0	
$B_{3i}-B_{43}.B_{5i}-B_{63}.B_{7i}$	B_8			394,41	129,11	11,4539	-1,20047	1	
B_{8i}/B_{83}	B_9			1	0,32736	0,02904	-0,00304	0,00253	

Keterangan :

B_1, B_2, B_3 = Angka diperoleh dari perhitungan sebelumnya.

B_4 = Angka diambil dari baris B_1

B_5 = Masing-masing angka pada baris B_4 dibagi angka 30 (angka B_4 paling depan)

1. 30 : 30 = 1
2. 1305,00 : 30 = 43,50
3. 1223,00 : 30 = 40,7667
4. 1126,00 : 30 = 37,5333
5. 1 : 30 = 0,03333
6. 0 : 30 = 0
7. 0 : 30 = 0

B_6 = Angka diperoleh dari B_2 - (1305,00 x B_5)

1. 57401,00 - (1305,00 x 43,5000) = 633,50
2. 53961,00 - (1305,00 x 40,7667) = 760,50
3. 49443,00 - (1305,00 x 37,5333) = 462,000
4. 0 - (1305,00 x 0,03333) = -43,500
5. 1 - (1305,00 x 0) = 1
6. 0 - (1305,00 x 0) = 0

B_7 = Masing-masing angka pada baris B_6 dibagi 633,50 (angka B_6 paling depan)

1. 633,50 : 633,50 = 1
2. 760,500 : 633,50 = 1,20047
3. 462,000 : 633,50 = 0,72928
4. -43,500 : 633,50 = -0,06866
5. 1 : 633,500 = 0,001578
6. 0 : 633,500 = 0

B_8 = Angka diperoleh dari B_3 - (1223,00 x B5) - (760,500 x B_7)

1. 51165,00 - (1223,00 x 40,7667) - (760,500 x 1,20047) = 394,4065
2. 46587,00 - (1223,00 x 37,5333) - (760,500 x 0,72928) = 129,1145
3. 0 - (1223,00 x 0,03333) - (760,500 x -0.06866) = 11,45393
4. 0 - (1223,00 x 0) - (760,500 x 0,001578) = -1,20047
5. 1 - (1223,00 x 0) - (760,500 x 0) = 1

B_9 = Masing-masing baris B_8 dibagi 394,4065 (angka B_8 paling depan)

1. 394,4065 : 394,4065 = 1
2. 129,1145 : 394,4065 = 0,327364
3. 11,45393 : 394,4065 = 0,029040
4. -1,20047 : 394,4065 = -0,00304
5. 1 : 394,4065 = 0,002535

Menghitung koefisien regresi (b_2) :

1 x b_2 = 0,327364 (angka pada baris B_9)

b_2 = 0,327364

Menghitung koefisien regresi (b_1) :

1 x b_1 + 1,20047 x b_2 = 0,72928 (angka pada baris B_7)

b_1 + (1,20047 x 0,327364) = 0,72928

b_1 = 0,72928 - 0,39291

b_1 = 0,33628

Menghitung konstanta atau intercept (b_o) :

(1 x b_o)+(43,500 x b_1)+(40,7667 x b_2)=37,5333 (angka baris B_5)

b_o - (43,500 x 0,3362) + (40,7667 x 0,3273) = 37,5333

b_o = 37,5333 - 27,9741
b_o = 9,55918

Sehingga diperoleh persamaan regresi linier ganda :

$$Y = 9{,}55918 + 0{,}33628\ X_1 + 0{,}32736\ X_2$$

Jumlah kuadrat konstanta (JKa) = faktor koreksi (FK)
JKa = B_4 x B_5 (pada kolom X'Y)
= 1126,00 x 37,53333
= 42262,53

Jumlah kuadrat koefisien regresi b_1 (JKb_1) :
JKb_1 = B_6 x B_7 (pada kolom X'Y)
= 462,00 x 0,72928
= 336,9281

Jumlah kuadrat koefisien regresi b_2 (JKb_2) :
JKb_2 = B_6 x B_7 (pada kolom X'Y)
= 129,114 x 0,327364
= 42,2674

Jumlah kuadrat koefisien regresi (JKR) :
JKR = JKb_1 + JKb_2
= 336,9281 + 42,2674
= 379,1956

Jumlah kuadrat total (JKt) :
JKt = ΣY^2 - JKa
= 42740,00 - 42262,53
= 477,4666

Jumlah kuadrat galat (JKG) :

JKG = Jkt - JKR

= 477,4666 - 379,1956

= 98,2710

Langkah-langkah menghitung derajad bebas (db) :

Db total (DBt)

= n - 1

= 30 - 1

= 9

Db Regresi (DBR) = 2

DB Galat (DBG)

= DBt - DBR

= 29 - 2

= 27

Langkah-langkah menghitung kuadrat tengah (KT) :

KT Regresi (KTR)

$$= \frac{\text{JKR}}{\text{DBR}}$$

$$= \frac{379{,}1956}{2}$$

= 189,5978

KT Galat (KTG)

$$= \frac{\text{JKG}}{\text{DBG}}$$

$$= \frac{98{,}2710}{27}$$

$$= 3{,}63966$$

Langkah-langkah menghitung F hitung :
F hitung

$$= \frac{\text{KTR}}{\text{KTG}}$$

$$= \frac{189{,}5978}{3{,}63966}$$

$$= 52{,}0920$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat disusun analisis ragam pada Tabel 2.8 berikut.

Tabel 2.8. Sidik Ragam Regresi Linier Berganda

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	F tabel 5%
Regresi	2	379,1956	189,5978	52,0920*	3,11
Galat	27	98,2710	3,6396		
Total	29	477,4666			

Keterangan :
* = berpengaruh nyata

Kesimpulan :

Karena F hitung (52,0920) > F tabel 5% (3,11), maka variabel X secara bersama-sama berpengaruh nyata terhadap variasi nilai variabel Y.

Menghitung besarnya pengaruh variabel x terhadap variasi variabel y dengan menghitung koefisien determinasi (r^2). Pengaruh secara bersama-sama variabel X terhadap variasi variabel Y (efektifitas garis regresi).

Koefisien Determinasi :

$$R^2 = \frac{\text{Jumlah kuadrat yang bisa dijelaskan}}{\text{Jumlah kuadrat total}} \times 100\%$$

$$= \frac{JKb_1 + JKb_2}{JKt} \times 100\%$$

$$= \frac{379{,}1956}{477{,}4666} \times 100\%$$

$$= 79{,}418\%$$

Kesimpulan :

Artinya variasi (naik turunnya) nilai variabel Y dipengaruhi secara bersama-sama oleh variabel X_1 dan X_2 sebesar 79,41%, sedangkan sisanya (100% - 79,41) = 19,59% dipengaruhi oleh variabel lain yang tidak diamati atau kesalahan (error).

Sumbangan relatif (SR) dan sumbangan efektif (SE) Variabel X terhadap Y.

Jumlah kuadrat koefisien regresi b_1 (JKb_1) :

$JKb_1 = B_6 \times B_7$ (pada kolom X'Y)
$= 462{,}00 \times 0{,}72928$
$= 336{,}9281$ (positif)

Jumlah kuadrat koefisien regresi b_2 (JKb_2) :
$JKb_2 = B_6 \times B_7$ (pada kolom X'Y)
$= 129{,}114 \times 0{,}327364$
$= 42{,}2674$ (positif)

Jumlah kuadrat koefisien regresi (JKR) :
$JKR = JKb_1 + Jkb_2$
$= 336{,}9281 + 42{,}2674$
$= 379{,}1956$

JKb_1 dan JKb_2 bernilai positif, maka harga JKb_1 dan JKb_2 sudah menjadi harga mutlaknya. Jika harga JKb_1 dan JKb_2 ada yang bernilai negatif maka harus dibuat mutlah terlebih dahulu.

Sumbangan relatif dihitung dengan harga mutlak (harga negatif ditiadakan), kemudian disesuaikan dengan harga JKR yang ada.

Sumbangan relatif (SR) dari masing-masing prediktor (variabel bebas) X, dalam harga mutlaknya :

$$SR_{X1} = \frac{JKb_1 \text{mutlak}}{\text{JKR mutlak}} \times JKR$$

$$= \frac{336{,}9281}{379{,}1956} \times 379{,}1956$$

$$= 379{,}1956$$

$$SR_{X2} = \frac{JKb_2 \text{ mutlak}}{JKR \text{ mutlak}} \text{ x JKR}$$

$$= \frac{42{,}2674}{379{,}1956} \text{ x } 379{,}1956$$

$$= 42{,}2674$$

Jumlah 336,9281 + 42,2674 = 379,1956

Jika sumbangan relatif dinyatakan dalam persen (%) :

$$SR_{X1} = \frac{JKb_1 \text{mutlak}}{JKR \text{ mutlak}} \text{ x JKR}$$

$$= \frac{336{,}9281}{379{,}1956} \text{ x } 100\%$$

$$= 88{,}85\%$$

$$SR_{X2} = \frac{JKb_2 \text{ mutlak}}{JKR \text{ mutlak}} \text{ x JKR}$$

$$= \frac{42{,}2674}{379{,}1956} \text{ x } 100\%$$

$$= 11{,}18\%$$

Jumlah 88,85 + 11,15% = 100%

Sumbangan prediktor yang dihitung dari keseluruhan efektivitas garis regresi. Sumbangan efektif (SE) dari masing-masing predikror X.

$$SE_{X1} = \frac{JKb_1 mutlak}{JKR\ mutlak} \times R^2$$

$$= \frac{336{,}9281}{379{,}1956} \times 79{,}1956\%$$

$$= 70{,}56\%$$

$$SE_{X2} = \frac{JKb_2 mutlak}{JKR\ mutlak} \times R^2$$

$$= \frac{42{,}2674}{379{,}1956} \times 79{,}1956\%$$

$$= 8{,}84\%$$

Jumlah : 70,56% + 8,84% = 79,418%

Pengujian terhadap koefisien regresi (b_i) : b_0, b_1 dan b_2

JK Galat = $\Sigma(Y\text{-}Y\ est.)^2$

Standard error estimasi (S_e) :

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Yest.)^2}{n-k-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{98{,}2710}{30 - 2 - 1}}$$

$$= 1{,}9077$$

Covarian Matrik (C_{ij}) :

C_{ij} = (B4 x b5) + (B6 x B7) + (B8 x B9) (dari tabel Doolittle kolom matrik Identitas)

C_{00} = (1 x 0,0333) + (-43,5 x -0,06866) + (11,4539 x 0,029040)

= 3,35294

C_{11} = (0 x 0) + (1 x 0,00157) + (-1,20047 x -0,00304)

= 0,00523

C_{22} = (0 x 0) + (0 x 0) + (1 x 0,002535) = 0,002535

Standard error koefisien regresi (Sb_i) :

$$Sb_i = \sqrt{C_{ij} \text{ x KT Galat}}$$

Standard error koefisien regresi b_0 :

$$Sb_0 = \sqrt{C_{00} \text{ x KT Galat}}$$

$$= \sqrt{3{,}352943 \text{ x } 3{,}63966}$$

$$= 3{,}493364$$

Standard error koefisien regresi b_1 :

$$Sb_1 = \sqrt{C_{11} \text{ x KT Galat}}$$

$$= \sqrt{0{,}005232 \text{ x } 3{,}63966}$$

$$= 0{,}13800$$

Standard error koefisien regresi b_2 :

$$Sb_2 = \sqrt{C_{22} \text{ x KT Galat}}$$

$$= \sqrt{0{,}002535 \text{ x } 3{,}63966}$$

$$= 0{,}096063$$

Perhitungan t hitung untuk koefisien regresi b_0, b_1 dan b_2:

T hitung b_0 = $\frac{b_0}{Sb_0}$

$= \frac{9{,}559183}{3{,}493363}$

$= 2{,}7363$

T hitung b_1 = $\frac{b_1}{Sb_1}$

$= \frac{0{,}33628}{0{,}13800}$

$= 2{,}43685$

T hitung b_2 = $\frac{b_2}{Sb_2}$

$= \frac{0{,}32736}{0{,}09606}$

$= 3{,}40778$

T tabel 5% db (27) = 2,001

Nilai t hitung b_0 = 2,7363, b_1= 2,4368, dan b_2= 3,4077 > t tabel 5% = 2,001, maka ada pengaruh nyata dari masing-masing variabel X_1 dan X_2 terhadap variabel Y.

Kesimpulan :

1. Konstanta signifikan, maka b_0 sebesar = 9,55918 tidak dapat dikatakan sama dengan 0, atau b_0 titik berimpit dengan titik koordinat (0, 0).
2. Variabel X_1 berpengaruh nyata terhadap variabel Y, dimana setiap peningkatan 1 unit variabel X_1 maka akan diikuti peningkatan variabel Y sebesar 0,33628.
3. Variabel X_2 berpengaruh nyata terhadap variabel Y, dimana setiap peningkatan 1 unit X_2 maka akan diikuti peningkatan Y sebesar 0,32736.

2.2.3.2. Paket Program SPSS Versi 23

Data Tabel 2.1 di atas dapat dianalisis dengan menggunakan paket Program SPSS versi 23, dengan hasil analisis berikut.

1. Hasil analisis ragam

Tabel 2.9. Analisis Ragam Regresi Linier Berganda

ANOVA[a]

Model	Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Regression	379,196	2	189,598	52,092	,000[b]
Residual	98,271	27	3,640		
Total	477,467	29			

a. Dependent Variable: Y

b. Predictors: (Constant), X_2, X_1

Berdasarkan Tabel 2.9 menunjukkan nilai F hitung sebesar 52,092 bersifat signifikan, karena F hitung dengan probabilitas signifikansi 0,000 < probabilitas F tabel 0,05. Hal tersebut menunjukkan bahwa variabel X_1 dan X_2 secara bersama-sama berpengaruh nyata terhadap perubahan variabel Y.

2. Pengujian koefisien regresi

Tabel 2.10. Koefisien regresi dan Nilai T hitung

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	Constant	9,559	3,493		2,736	,011
	X_1	,336	,138	,387	2,437	,022
	X_2	,327	,096	,542	3,408	,002

a. Dependent Variable: Y

Berdasarkan Tabel 2.10 di atas diperoleh persamaan regresi dengan fungsi : $Y = 9{,}559 + 0{,}336\ X_1 + 0{,}327\ X_2$

Kesimpulan :

1. Konstanta (b_0) sebesar = 9,559 dan nilai t hitungnya sebesar 2,736 dengan probabilitas signifikasi 0,011 < probabilitas tabel sebesar 0,05, maka tidak dapat dikatakan sama dengan 0. Artinya b_0 titik berimpit dengan titik koordinat (0, 0).

2. Koefisien regresi b_1 sebesar 0,336 dengan nilai t hitung sebesar 2,437 dengan probabilitas signifikansi 0,022 < probabilitas tabel 0,05. Artinya variabel X_1 berpengaruh nyata positif terhadap perubahan variabel Y.

3. Koefisien regresi b_2 sebesar 0,327 dengan dengan t hitung sebesar 3,408 dan probabilitas signifikansi 0,002 < probabilitas tabel 0,05. Artinya variabel X_2 berpengaruh nyata positif terhadap variabel Y

BAB 3

ANALISIS REGRESI POLINOMIAL

3.1. Pendahuluan

Persamaan umum regresi polinomial, yaitu : $Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3 + ... + b_kX^k$. Uji kecenderungan (*trend comparation*) digunakan untuk memilih model regresi yang paling tepat (*lack of fit*) dari pengaruh perlakuan terhadap parameter yang diamati. Uji kecenderungan tergantung jumlah aras perlakuan.

1. Perlakuan dengan 3 aras :
   a. Linier : $Y = b_0 + b_1 X^1 + e$
   b. Kuadratik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + e$
2. Perlakuan dengan 4 aras :
   a. Linier : $Y = b_0 + b_1 X^1 + e$
   b. Kuadratik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + e$
   c. Kubik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + e$
3. Perlakuan dengan 5 aras :
   a. Linier : $Y = b_0 + b_1 X^1 + e$
   b. Kuadratik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + e$
   c. Kubik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + e$
   d. Kuartik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + e$
4. Perlakuan dengan 6 aras :
   a. Linier : $Y = b_0 + b_1 X^1 + e$
   b. Kuadratik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + e$
   c. Kubik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + e$
   d. Kuartik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + e$
   e. Kuintik : $Y = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + b_5 X^5 + e$

Tabel 3.1.
Koefisien Orthogonal Polinomial untuk Interval Perlakuan Sama

Aras Perla-kuan	Derajad Polino-mial	Perlakuan						Jumlah Kuadrat Koefisien
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	
3	Linier	-1	0	+1				2
	Kuadratik	+1	-2	+1				6
4	Linier	-3	-1	+1	+3			20
	Kuadratik	+1	-1	-1	+1			4
	Kubik	-1	+3	-3	+1			20
5	Linier	-2	-1	0	+1	+2		10
	Kuadratik	+2	-1	-2	-1	+2		14
	Kubik	-1	+2	0	-2	+1		10
	Kuartik	+1	-4	+6	-4	+1		70
6	Linier	-5	-3	-1	+1	+3	+5	70
	Kuadratik	+5	-1	-4	-4	-1	+5	84
	Kubik	-5	+7	+4	-4	-7	+5	180
	Kuartik	+1	-3	-2	+2	-3	+1	28
	Kuintik	-1	+5	+10	+10	-5	+1	252

3.2. Regresi polinomial

Uraian lebih lanjut tentang masing-masing trend regresi akan dibahas secara rinci pada pembahasan berikut.

3.2.1. Model linier

Model linier ini adalah model regresi yang paling sederhana dengan persamaan umum :

$$Y = b_0 + b_1X^1$$

Keterangan :

Y = Variabel tergantung,

b_0 = Konstanta,

b_1 = Koefisien regresi,

X^1 = Variabel bebas.

Nilai b_0 dan b_1 dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

Koefisien regresi (b_1) berikut.

$$b_1 = \frac{n\,\Sigma XY - (\Sigma X\,\Sigma Y)}{(n\,\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$$

Konstanta (b_0) :

$$b_0 = \frac{\Sigma Y}{n} - \frac{b\,\Sigma X}{n}$$

Selain nilai b_0 dan b_1, maka perlu ditentukan koefisien determinasi linier (r^2) dengan rumus berikut.

Koefisien determinasi linier (r^2) :

$$r^2 = \frac{b\left(\Sigma XY - \frac{(\Sigma X\,\Sigma Y)}{n}\right)}{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}} \quad \text{atau} = \frac{\text{JK Regresi}}{\text{JK Total}}$$

Kofisien determinasi ini berfungsi untuk menentukan tingkat ketepatan model dari persamaan regresi tersebut dalam menjelaskan perubahan atau variasi variabel terikat (Y) secara linier.

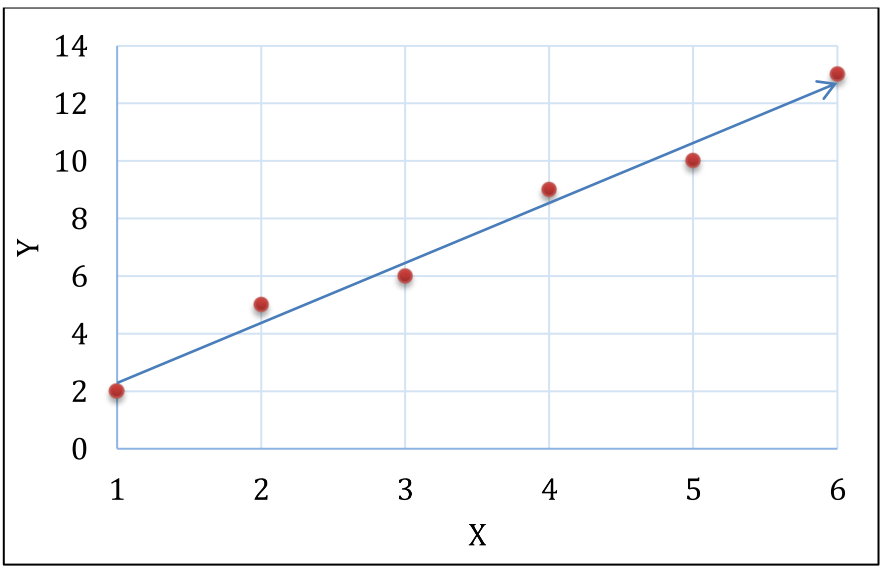
Nilai r^2 antara 0–1. Apabila mendekati angka 1, maka model regresi linier mempunyai ketepatan (*accurity*) yang tinggi untuk menjelaskan pengaruh variabel bebas (X) terhadap variasi variabel Y.

Apabila koefisien regresi bernilai positif (+), maka kurva miring ke atas, sedangkan bila nilai b negatif (-), maka kurva miring ke bawah.

Untuk lebih jelasnya Gambar 3.1 berikut menjelaskan kurva regresi linier dengan slope positif (b > 0).

Kemungkinan model 1:

Regresi linier dengan persamaan → $Y = b_0 + b_1X^1$



Gambar 3.1.
Kurva Linier Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y Bersifat Positif

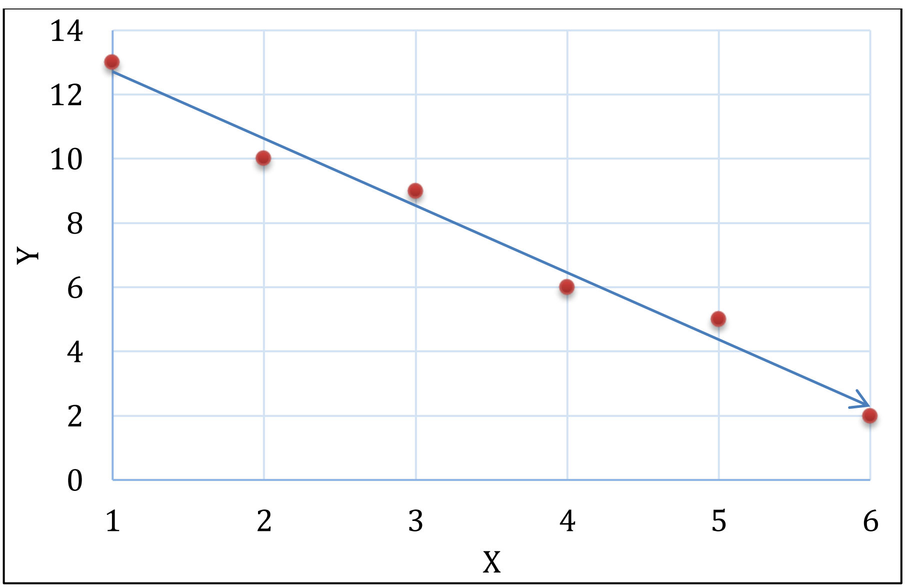
Gambar 3.1 *slope* koefisien regresi linier (b_1) di atas bernilai positif, maka kurva miring ke atas. Hal ini menunjukkan setiap peningkatan 1 (satu) unit variabel X, maka akan menyebabkan peningkatan variabel Y sebesar b_1.

Koefisien determinasi (r^2) = r%, menunjukkan bahwa variasi variabel Y dapat dijelaskan secara linier oleh variabel X sebesar r%.

Kurva regresi linier dengan dengan slope negatif ($b < 0$) dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut.

Kemungkinan model 2:

Regresi linier dengan persamaan → $Y = b_0 - b_1X^1$



Gambar 3.2.
Kurva Linier Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y Bersifat Negatif

Gambar 3.2 dapat dijelaskan bahwa slope koefisien regresi linier (b_1) di atas bernilai negatif, maka kurva miring ke bawah. Hal ini menunjukkan bahwa setiap peningkatan 1 (satu) unit variabel X akan menyebabkan penurunan variabel Y sebesar b_1. Dan koefisien determinasi (r^2) = r%.

3.2.2. Model kuadratik

Regresi kuadratik disebut juga persamaan regresi berorder dua, karena memiliki variabel X sampai berpangkat 2 (dua). Persamaan umum regresi kuadratik yaitu :

$$Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2$$

Keterangan :

Y = Variabel tergantung,
b_0 = Konstanta,
b_1 = Koefisien regresi dari variabel X^1,
b_2 = Koefisien regresi dari variabel X^2,
X^1 = Variabel bebas.
X^2= Variabel bebas X^1 dikuadratkan.

Koefisien regresi b_0, b_1 dan b_2 dapat ditentukan dengan rumus :

- Koefisien regresi b_1 = $\dfrac{(\Sigma z2^2 \text{ x } \Sigma z1y) - (\Sigma z1z2 \text{ x } \Sigma z2y)}{(\Sigma z1^2 \text{ x } \Sigma z2^2) - (\Sigma z1z2)^2}$
- Koefisien regresi b_2 = $\dfrac{(\Sigma z1^2 \text{ x } \Sigma z2y) - (\Sigma z1z2 \text{ x } \Sigma z1y)}{(\Sigma z1^2 \text{ x } \Sigma z2^2) - (\Sigma z1z2)^2}$
- Konstanta (a) = $\overline{Y}$ - (b_1 x $\overline{X}$) - (b_2 x $\overline{X}^2$)

Berdasarkan persamaan regresi tersebut, maka dapat ditentukan nilai X_{max} atau X_{min} dan Y_{max} atau Y_{min}. Apabila d_y^2/d_x^2 < 0, maka akan diperoleh X_{max} dan Y_{max} dan kurva regresi akan menghadap ke bawah. Apabila $d_y^2/d_x^2 > 0$, maka akan diperoleh X_{min} dan Y_{max} dan kurva regresi akan menghadap ke atas.

Turunan pertama persamaan regresi tersebut, maka akan diperoleh nilai X_{max} atau X_{min} yaitu :

$$Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2,$$

Maka persamaan menjadi :

$$Y' = 0 \rightarrow 0 = 0 + b_1 + 2b_2X$$

$$-2b_2X = b_1$$

$$X = -\frac{b_1}{2\,b_2}$$

Nilai Y_{max} atau Y_{min} diperoleh dengan cara mensubstitu-sikan nilai X_{max} atau X_{min} ke persamaan regresi menjadi :

$$Y = b_0 + (b_1 * X_{max}) + (b_2 * X^2_{max})$$

Atau :

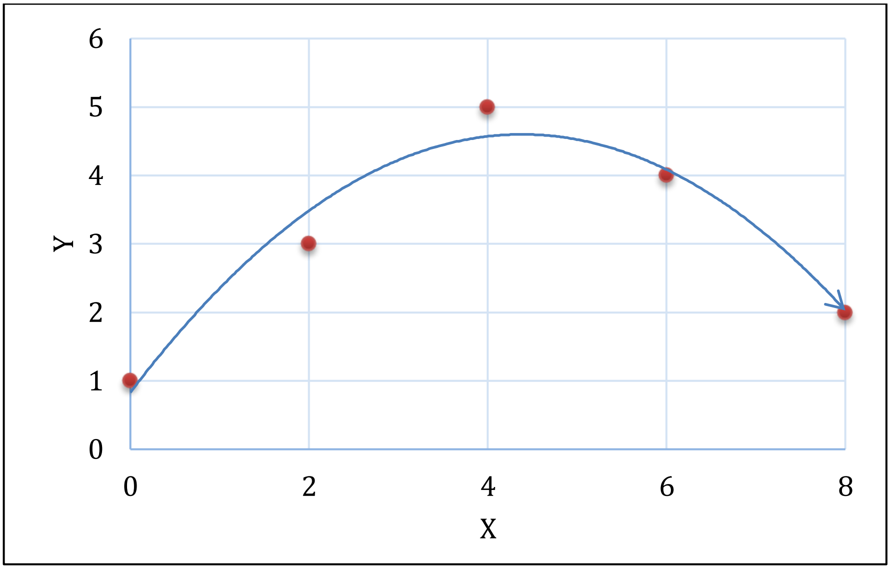
$$Y = b_0 + (b_1 * X_{min}) + (b_2 * X^2_{min})$$

Untuk melihat tingkat ketepatan model regresi kuadratik atau besarnya variasi Y yang dapat dijelaskan secara kuadratik oleh variabel X, maka dihitung koefisien determinasi kuadratik (R^2) dengan rumus :

Koefisien determinasi (R^2) :

$$= \frac{(b1 \text{ x } \Sigma z1y) + (b2 \text{ x } \Sigma z2y)}{\Sigma y^2} \text{ atau } = \frac{\text{JK Regresi}}{\text{JK Total}}$$

Kemungkinan model 1:
Regresi kuadratik dengan persamaan → $Y = b_0 + b_1X^1 - b_2X^2$.



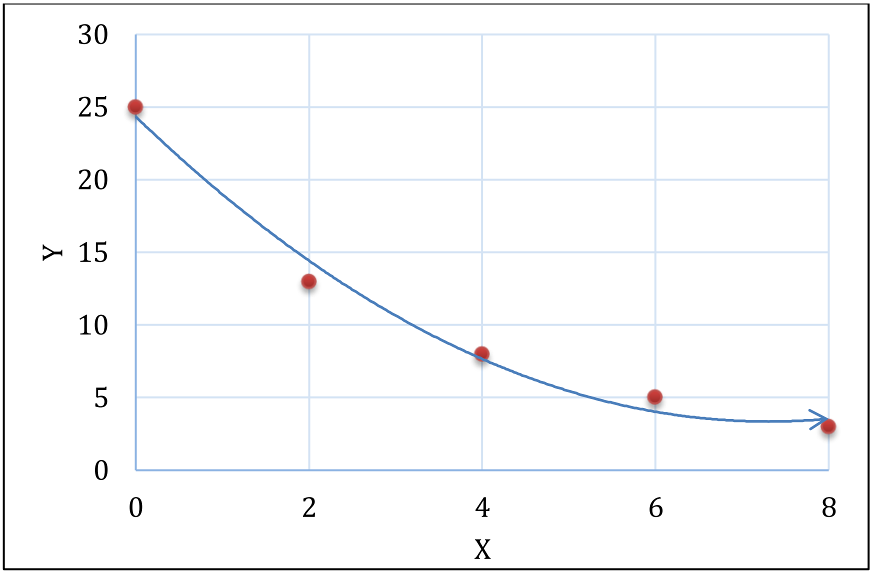
Gambar 3.3.
Kurva Kuadratik Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y, Nilai $b_1 > 0$

Berdasarkan Gambar 3.3 dapat dijelaskan bahwa slope koefisien regresi b_1 bernilai positif dan b_2 bernilai negatif, artinya setiap peningkatan X secara linier akan menyebabkan peningkatan Y sebesar b_1 dan secara kuadratik terjadi penurunan sebesar b_2.

Nilai variabel Y_{maks} dicapai pada saat X_{opt}. Pada titik (X_{maks}; Y_{maks}) besarnya peningkatan Y sama dengan penurunan Y. Variabel Y akan semakin menurun drastis setelah melewati X_{opt}. Dimana koefisien determinasi (R^2) = R%.

Kemungkinan model 2:

Regresi kuadratik dengan persamaan → $Y = b_0 - b_1X^1 + b_2X^2$.



Gambar 3.4.

Kurva Kuadratik Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y, Nilai $b_0 < 0$

Berdasarkan Gambar 3.4 di atas dapat dijelaskan bahwa slope koefisien regresi b_1 bernilai negatif dan b_2 bernilai positif, artinya setiap peningkatan variabel X secara linier akan menyebabkan penurunan variabel sebesar b_1 dan secara kuadratik terjadi peningkatan sebesar b_2.

Variabel Y terendah (Y_{min}) dicapai pada saat X_{min}. Pada titik (X_{min}; Y_{min}) besarnya penurunan Y sama dengan peningkataan Y. Variabel Y akan semakin meningkat setelah melewati X_{min}. Dimana koefisien determinasi (R^2) = R%.

3.2.3. Model Kubik

Model tersebut disebut persamaan regresi berorder tiga, karena variabel X sampai berpangkat 3. Persamaan umum regresi tersebut yaitu :

$$Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3$$

Keterangan :

Y = Variabel tergantung,
b_0 = Konstanta,
b_1 = Koefisien regresi dari variabel X^1,
b_2 = Koefisien regresi dari variabel X^2,
b^3 = Koefisien regresi dari variabel X^3,
X^1 = Variabel bebas X pangkat 1,
X^2 = Variabel bebas X pangkat 2,
X^3 = Variabel bebas X pangkat 3.

Nilai b_0, b_1, b_2 dan b_3 ditentukan lebih mudah dengan menggunakan metode abreviate Doollittle.

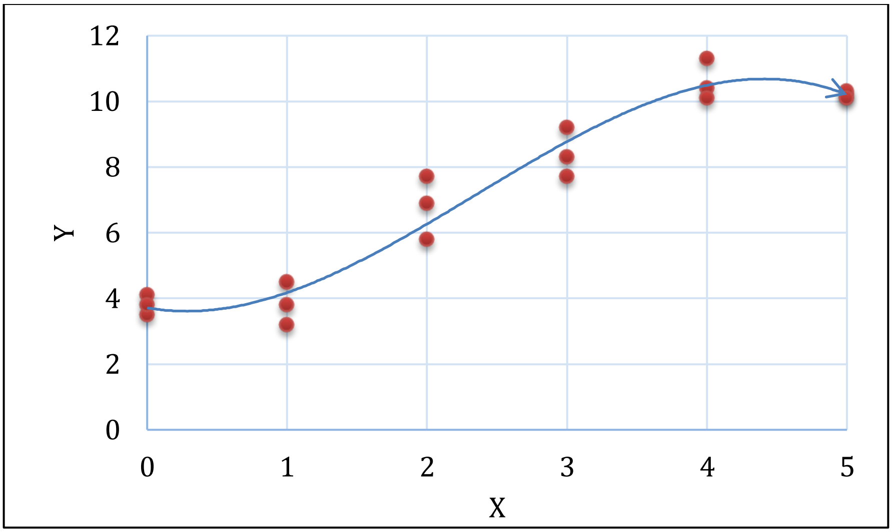
Untuk melihat tingkat ketepatan model regresi kubik atau besarnya variasi variabel Y yang dapat dijelaskan secara kubik oleh variabel X, dengan koefisien determinasi kubik (R^2).

$$\text{Koefisien determinasi } (R^2) = \frac{\text{JK Regresi}}{\text{JK Total}}$$

Untuk lebih jelasnya kurva kubik dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut. Gambar 3.5 tersebut di bawah dapat dijelaskan bahwa slope koefisien regresi b_1 bernilai negatif, b_2 bernilai positif dan b_3 bernilai negatif, hal ini menunjukkan bahwa setiap peningkatan penggunaan 1 unit variabel X akan menyebabkan penurunan Y secara linier sebesar b_1 dan terjadi peningkatan secara kuadratik sebesar b_2 serta terjadi penurunan secara kubik sebesar b_3. Perubahan variabel Y dapat dijelaskan karena perubahan variabel X dinyatakan dengan koefisien determinasi (R^2) = R%.

Persamaan kubik :

$$Y = b_0 - b_1X^1 + b_2X^2 - b_3X^3$$



Gambar 3.5.
Kurva Kubik Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y.

3.2.4. Model Kuartik

Model tersebut disebut persamaan regresi berorder empat, karena variabel X sampai berpangkat 4. Persamaan umum regresi kuartik, yaitu :

$$Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4$$

Keterangan :

Y = Variabel tergantung,
b_0 = Konstanta,
b_1 = Koefisien regresi dari variabel X^1,
b_2 = Koefisien regresi dari variabel X^2,
b^3 = Koefisien regresi dari variabel X^3,
b_4 = Koefisien regresi dari variabel X^4,
X^1 = Variabel bebas X pangkat 1,
X^2 = Variabel bebas X pangkat 2,
X^3 = Variabel bebas X pangkat 3,
X^4 = variabel bebas X pangkat 4.

Nilai b_0, b_1, b_2, b_3 dan b_4 ditentukan dengan menggunakan metode Abreviate Doollittle.

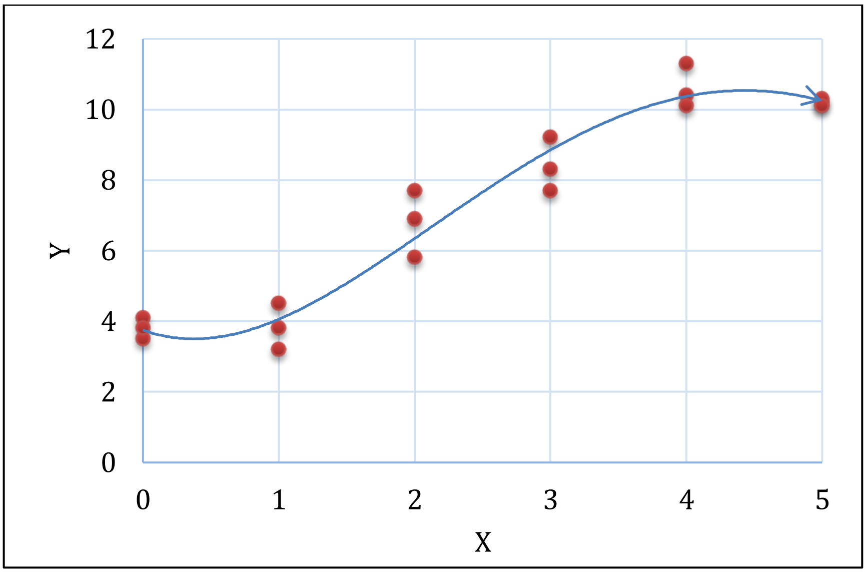
Untuk melihat tingkat ketepatan model regresi kuartik atau besarnya variasi variabel Y yang dapat dijelaskan secara kuartik oleh variabel X, maka dihitung koefisien determinasi kuartik (R^2) dengan rumus :

$$\text{Koefisien determinasi } (R^2) = \frac{\text{JK Regresi}}{\text{JK Total}}$$

Persamaan kuartik :

$$Y = B_0 - b_1 X^1 + b_2 X^2 - b_3 X^3 + b_4 X^4.$$

Untuk lebih jelasnya kurva kuartik dapat dilihat pada Gambar 3.6 berikut. Pada Gambar 3.6 di atas dapat dijelaskan bahwa slope koefisien regresi b_1 bernilai negatif, b_2 bernilai positif dan b_3 bernilai negatif dan b_4 bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa setiap peningkatan satu input X akan menyebabkan peningkatan Y secara linier sebesar b_1, terjadi peningkatan secara kuadratik sebesar b_2, terjadi penurunan secara kubik sebesar b_3 serta terjadi peningkatan secara kuartik sebesar b_4, dimana koefisien determinasi kuartik (R^2) = R%.



Gambar 3.6.
Kurva Kuartik Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y.

3.2.5. Model Kuintik

Model tersebut disebut persamaan regresi berorder lima, karena variabel X sampai berpangkat 5. Persamaan umum regresi yaitu :

$$Y = b_0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + b_5X^5$$

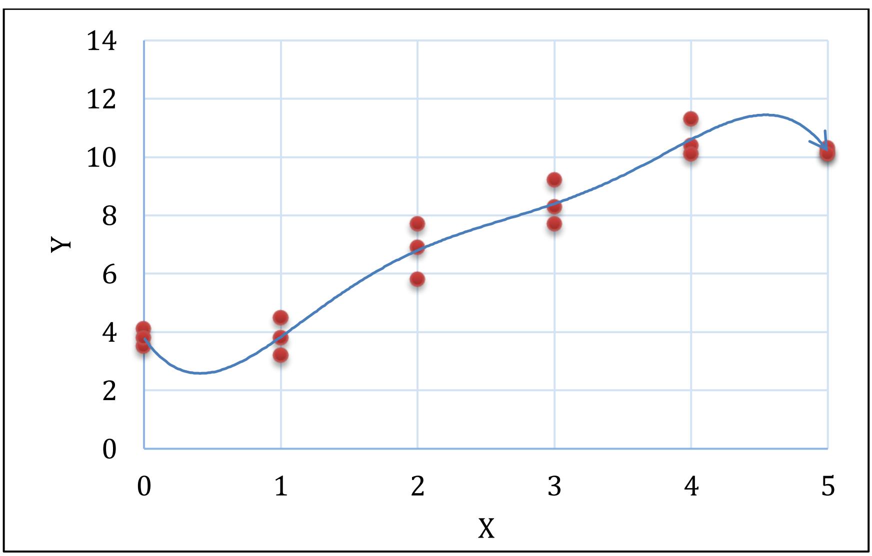
Keterangan :

Y = Variabel tergantung,

b_0 = Konstanta,

b_1 = Koefisien regresi dari variabel X^1,
b_2 = Koefisien regresi dari variabel X^2,
b^3 = Koefisien regresi dari variabel X^3,
b_4 = Koefisien regresi dari variabel X^4,
b_5 = Koefisien regresi dari variabel X^5,
X^1 = Variabel bebas X pangkat 1,
X^2 = Variabel bebas X pangkat 2,
X^3 = Variabel bebas X pangkat 3,
X^4 = Variabel bebas X pangkat 4,
X^5 = Variabel bebas X pangkat 5.

Nilai b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 dan b_5 ditentukan dengan menggunakan metode Abreviate Doollittle. Gambar kurva kuintik dapat dilihat pada Gambar 3.7 berikut.



Gambar 3.7.
Kurva Kuintik Pengaruh Variabel X terhadap Variabel Y.

3.3. Penentuan Ketepatan Model Regresi

Ada dua cara untuk menentukan ketepatan (*lack of fit*) model regresi yang tepat yaitu melalui :

1. Koefisien determinasi (R^2)
2. Analisis ragam atau *analysis of variance* (Anova)

3.3.1. Koefisien determinasi

Pada pembahasan ini, masing-masing model regresi harus dilakukan perhitungan besaran koefisien determinasinya. Model regresi yang memiliki koefisien determinasi yang paling tinggi merupakan model yang paling tepat untuk dipilih.

Jika dilakukan pengamatan terhadap sejumlah data dari 6 perlakuan dan 3 ulangan pada kondisi lingkungan seragam, maka derajad bebas perlakuan (DBP) = 6 -1 = 5.

Kemungkinan model regresi yang dapat dibuat, yaitu : linier, kuadratik, kubik, kuartik dan kuintik, seperti pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2.

Model regresi dari perlakuan dengan 6 aras

No.	Model Regresi	Koefisien determinasi (R^2)
1	A = Linier	R^2 (A)
2	B = Kuadratik	R^2 (B)
3	C = Kubik	R^2 (C)
4	D = Kuartik	R^2 (D)
5	E = Kuintik	R^2 (E)

Keterangan :

Model regresi yang memiliki R^2 tertinggi yang tepat

3.3.2. Analisis ragam

Penentuan (pemilihan) regresi yang paling tepat melalui analisis ragam dengan melihat F hitung regresi dibandingkan F tabelnya. Jika F hitung regresi > F tabel, maka regresi tersebut bersifat nyata (tepat untuk dipilih).

Pada analisis ragam, model regresi yang tepat untuk dipilih yaitu model order (pangkat) regresi tertinggi yang nyata, meskipun F hitungnya lebih kecil dibandingkan order regresi yang lebih rendah.

Jika dilakukan pengamatan terhadap sejumlah data dari 6 perlakuan (T) dan diulang 3 kali. Percobaan dilakukan pada lingkungan lingkungan yang betul-betul kondisinya seragam, maka dapat dibuat struktur data dapat dilihat pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3.
Struktur Data

Perlakuan	Ulangan			Jumlah
	1	2	3	
T_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	$\Sigma X_{1.}$
T_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	$\Sigma X_{2.}$
T_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	$\Sigma X_{3.}$
T_4	X_{41}	X_{42}	X_{43}	$\Sigma X_{4.}$
T_5	X_{51}	X_{52}	X_{53}	$\Sigma X_{5.}$
T_6	X_{61}	X_{62}	X_{63}	$\Sigma X_{6.}$

Menghitung faktor koreksi (FK) = $\dfrac{(\Sigma\Sigma X_{..})^2}{k \times n}$

Menghitung jumlah kuadrat (JK) :

1. JK total (JKT) $= \Sigma\Sigma X_{ij}^2 -$ FK

2. JK perlakuan (JKP) $= \dfrac{\Sigma(X_{i.})^2}{k} -$ FK

Tabel 3.4 berikut dipersiapkan untuk menghitung jumlah kuadrat dari masing- masing model regresi.

Tabel 3.4.
Orthogonal polinomial untuk interval perlakuan sama pada perlakuan T

Trend Regresi	Perlakuan						Dev. X^2
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
A = Linier	-5	-3	-1	+1	+3	+5	70
B = Kuadratik	+5	-1	-4	-4	-1	+5	84
C = Kubik	-5	+7	+4	-4	-7	+5	180
D = Kuartik	+1	-3	+2	-2	-3	+1	28
E = Kuintik	-1	+5	-10	+10	-5	+1	252
Total	$\Sigma X_{1.}$	$\Sigma X_{2.}$	$\Sigma X_{3.}$	$\Sigma X_{4.}$	$\Sigma X_{5.}$	$\Sigma X_{6.}$	

Derajad bebas perlakuan (DBP) = T - 1 = 6- 1 = 5, maka JK regresi (JKR) yang dapat dihitung yaitu : JKR linier (JKR A), JKR kuadratik (JKR B), JKR kubik (JKR C), JKR kuartik (JKR D) dan JKR kuintik (JKR E).

3. Jumlah kuadrat regresi (JKR) :

   a. JKR A = $\dfrac{\sum (-5 \text{ x } \Sigma X_{1.}) + \cdots + (+ 5 \text{ x } \Sigma X_{6.})^2}{\text{k x } X^2 \text{Linier}}$

   b. JKR B = $\dfrac{\sum (+5 \text{ x } \Sigma X_{1.}) + \cdots + (+5 \text{ x } \Sigma X_{6.})^2}{\text{k x } X^2 \text{ kuadratik}}$

   c. JKR C = $\dfrac{\sum (-5 \text{ x } \Sigma X_{1.}) + \cdots + (+5 \text{ x } \Sigma X_{6.})^2}{\text{k x } X^2 \text{ kubik}}$

   d. JKR D = $\dfrac{\sum (+1 \text{ x } \Sigma X_{1.}) + \cdots + (+1 \text{ x } \Sigma X_{6.})^2}{\text{k x } X^2 \text{ kuartik}}$

   e. JKR E = $\dfrac{\sum (-1 \text{ x } \Sigma X_{1.}) + \cdots + (+1 \text{ x } \Sigma X_{6.})^2}{\text{k x } X^2 \text{ kuintik}}$

4. JK galat (JKG) = JKT - JKP

Menghitung derajad bebas (DB) :

1. DB Perlakuan (DBP) = P – 1
2. DB Regresi (DBR) = 1 (terdefinisi)
3. DB Total (DBT) = (n x k) -1
4. DB Galat (DBG) = DBT - DBP

Menghitung kuadrat tengah (KT) :

1. KT perlakuan (KTP) = $\frac{\text{JKP}}{\text{DBP}}$

2. KT regresi A...E ($\text{KTR}_{\text{A...E}}$) = $\frac{\text{JKR}_{\text{A...E}}}{\text{DBR}}$

3. KT galat (KTG) = $\frac{\text{JKG}}{\text{DBP}}$

Menghitung F. hitung (F hit.):

1. F hitung perlakuan (F hit. P) = $\frac{\text{KTP}}{\text{KTG}}$

2. F hitung regresi A...E (F hit. $\text{R}_{\text{A...E}}$) = $\frac{\text{KTR}_{\text{A...E}}}{\text{KTG}}$

Tabel 3.5.
Analisis Ragam

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	T tabel 5%
Perlakuan	DBP	JK P	KT P	F hit. P	(DBP; DBG)
A	1	JKR A	KTR A	F hit. A	(1; DBG)
B	1	JKR B	KTR B	F hit. B	(1; DBG)
C	1	JKR C	KTR C	F hit. C	(1; DBD)
D	1	JKR D	KTR D	F hit. D	(1; DBG)
E	1	JKR E	KTR E	F hit. E	(1; DBG)
Galat	DBG	JKG			
Total	DBT	JKT			

Keterangan :

* = Berpengaruh nyata, n = Tidak nyata.

Kesimpulan :

Regresi yang dipilih (tepat) adalah regresi dengan order (pangkat) tertinggi yang nyata.

3.4. Contoh Perhitungan

Suatu penelitian berjudul “Pengaruh umur petani terhadap produktivitas kerja di perkebunan PT. Agro Untung. Variabel yang diamati yaitu umur petani (variabel X) dan variabel produktivitas kerja (Variabel Y). Penelitian ini dibutuhkan sampel sebanya18 orang dengan umur petani mulai dari 20 s/d 50 tahun.

Kelompok umur petani :

1. Kelompok 1 yaitu : 20 - 25 tahun, maka nilai Nt_1 yang diambil 23 tahun.
2. Kelompok 2 yaitu : 25 - 30 tahun, maka nilai Nt_2 yang diambil 28 tahun.
3. Kelompok 3 yaitu : 30 - 35 tahun, maka nilai Nt_3 yang diambil 33 tahun.
4. Kelompok 4 yaitu : 35 - 40 tahun, maka nilai Nt_4 yang diambil 38 tahun.
5. Kelompok 5 yaitu : 40 - 45 tahun, maka nilai Nt_5 yang diambil 43 tahun.
6. Kelompok 6 yaitu : 45 - 50 tahun, maka nilai Nt_6 yang diambil 48 tahun.

Adapun variabel bebas (X) yang dimaksud yaitu umur petani, dalam hal ini diperoleh dari masing-masing nilai tengah (Nt) kelompok umur petani.

Nt_i dianggap sama dengan atau sebagai X_i. Sebagai variabel tergantung (Y_i) yaitu produktivitas kerja (dalam m^2/hari).

Data pada Tabel 3.6 diuji dengan model regresi polinomial untuk menentukan model yang lebih cocok untuk mewakili pengaruh umur petani terhadap produktivitas kerja. Untuk itu dapat dilakukan pengujian lebih lanjut terhadap model model polinomial yang lebih tepat.

Dalam penelitian ini, menggunakan 6 kelompok umur (simbul T) yaitu umur : 23 (T1), 28 (T2), 33 (T3), 38 (T4), 43 (T5) dan 48 (T6). Oleh sebab itu derajad bebas (db) = 6 - 1 = 5.

Perlakuan umur petani db-nya 5, maka model yang dapat diuji yaitu : model linier, model kuadratik, model kubik, model kuartik dan model kuintik.

Tabel 3.6.
Data Pengamatan Telah Diolah Berdasarkan Umur Petani dan Produktivitas Tenaga Kerja

Sampel No.	Umur Petani (Tahun) X	Produktivitas Kerja (m^2/hari) Y
1	23	6,70
2	23	7,16
3	23	8,24
4	28	9,41
5	28	8,38
6	28	7,97
7	33	10,59
8	33	8,97
9	33	9,22
10	38	7,84
11	38	6,88
12	38	7,01
13	43	6,41
14	43	6,02
15	43	5,97
16	48	6,18
17	48	5,62
18	48	5,52

3.4.1. Penentuan model dengan koefisien determinasi

Untuk melakukan pengujian model, maka dilakukan terhadap model regresi yang paling rendah pangkatnya (X^1) yaitu: model linier, kemudian kuadratik (X^2), kubik (X^3), kuartik (X^4) dan terakhir yaitu kuintik (X^5). Pengujian model regresi digunakan bantuan software program Excell. Tahap pengujian secara praktis dapat dicermati pada langkah berikut.

3.4.1.1. Model linier

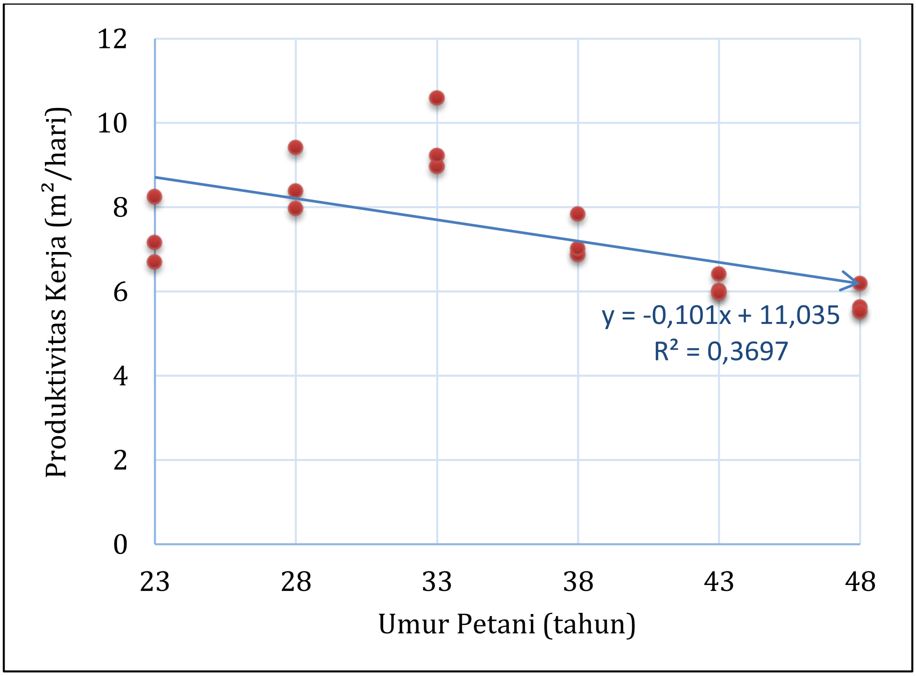
Tabel 3.10 berasal dari Tabel 3.6 merupakan data yang dipersiapkan untuk input pada program software Excell.

Tabel 3.10.
Data untuk Analisis Regresi Linier Pengaruh Umur Petani (X) terhadap Produktivitas Kerja (Y)

No.	X_i	Y_i
1	23	6.70
2	23	7.16
3	23	8.24
4	28	9.41
5	28	8.38
6	28	7.97
7	33	10.59
8	33	8.97
9	33	9.22
10	38	7.84
11	38	6.88
12	38	7.01
13	43	6.41
14	43	6.02
15	43	5.97
16	48	6.18
17	48	5.62
18	48	5.52

Dengan bantuan software program Excell dapat dibuat kurva linier dari pengaruh umur petani (X) dan produktivitas kerja (X) berikut.

Berdasrkan hasil analisis tersebut, maka diperoleh persamaan regresi linier : Y = 11,0352 – 0,10101 X, dengan koefisien determinasi linier (r^2) = 0,36 (Gambar 3.8).



Gambar 3.8.
Pengaruh Umur Petani (Tahun) terhadap Produktivitas Kerja (m^2/hari) secara Linier

3.4.1.2. Model kuadratik

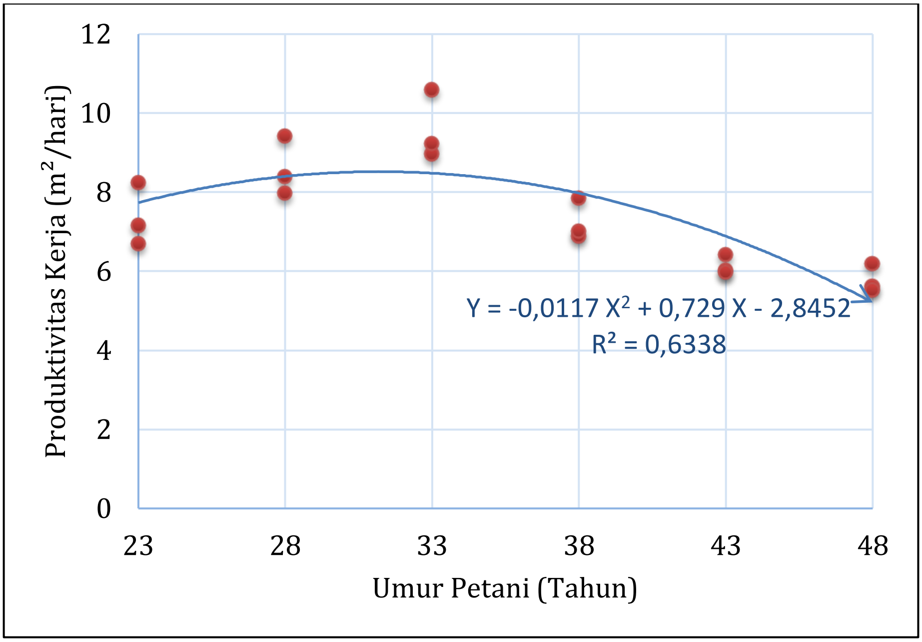
Variabel X_i^2 pada Tabel 3.11 berasal dari variabel X_i yang dikuadratkan. Berikut data yang dipersiapkan untuk analisis regresi kuadratik dan akan diolah dengan software program Excell.

Tabel 3.11.
Data untuk Analisis Regresi Kuadratik Pengaruh Umur Petani (X) terhadap Produktivitas Kerja (Y)

No.	X_i	X_i^2	Y_i
1	23	529	6.70
2	23	529	7.16
3	23	529	8.24
4	28	784	9.41
5	28	784	8.38
6	28	784	7.97
7	33	1089	10.59
8	33	1089	8.97
9	33	1089	9.22
10	38	1444	7.84
11	38	1444	6.88
12	38	1444	7.01
13	43	1849	6.41
14	43	1849	6.02
15	43	1849	5.97
16	48	2304	6.18
17	48	2304	5.62
18	48	2304	5.52

Dengan bantuan software program Excell dapat dibuat kurva kuadratik dari pengaruh umur petani (X) dan produktivitas kerja (X) berikut.

Berdasarkan Tabel 3.11 diperoleh hasil analisis regresi kuadrati dengan persamaan regresi kuadratik : Y = -2,8452 + 0,7290 X – 0,01169 X^2 dan koefisien determinasi kuadratik (R^2) = 0,63 (Gambar 3.9).



Gambar 3.9.
Pengaruh Umur Petani (Tahun) terhadap Produktivitas Kerja (m^2/hari) secara Kuadratik

3.4.1.3. Model kubik

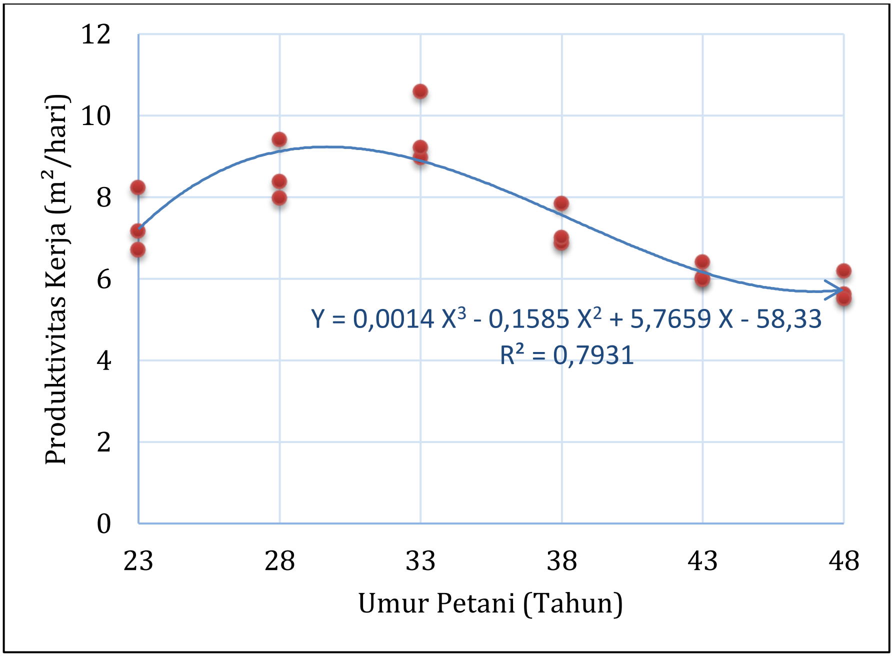
Variabel X_i^2 dan X_i^3 pada Tabel 3.12 berasal dari variabel X_i dipangkatkan 2 dan 3. Berikut data yang dipersiapkan untuk analisis regresi kubik dan akan diolah dengan software program Excell.

Tabel 12.
Data untuk Analisis Regresi Kuadratik Pengaruh Umur Petani (X) terhadap Produktivitas Kerja (Y)

No.	X_i	X_i^2	X_i^3	Y_i
1	23	529	12167	6,70
2	23	529	12167	7,16
3	23	529	12167	8,24
4	28	784	21952	9,41
5	28	784	21952	8,38
6	28	784	21952	7,97
7	33	1089	35937	10,59
8	33	1089	35937	8,97
9	33	1089	35937	9,22
10	38	1444	54872	7,84
11	38	1444	54872	6,88
12	38	1444	54872	7,01
13	43	1849	79507	6,41
14	43	1849	79057	6,02
15	43	1849	79507	5,97
16	48	2304	110592	6,18
17	48	2304	110592	5,62
18	48	2304	110592	5,52

Dengan bantuan menggunakan software program Excell dapat dibuat kurva kubik dari pengaruh umur petani (X) terhadap produktivitas kerja (X).

Berdasarkan hasil analisis tersebut, maka diperoleh persamaan regresi kubik : $Y = -58{,}3302 + 5{,}7659\ X - 0{,}1585\ X^2 + 0{,}00138\ X^3$ dan koefisien determinasi kubik (R^2) = 0,79 (Gambar 3.10).



Gambar 3.10.
Pengaruh Umur Petani (Tahun) terhadap Produktivitas Kerja (m^2/hari) secara Kubik

3.4.1.4. Model kuartik

Variabel X_i^2 ; X_i^3 dan X_i^4 pada Tabel 3.13 maerupkan variabel X_i yang dipangkatkan 2 ; 3 dan 4. Berikut data yang dipersiapkan untuk analisis regresi kuartik dan akan diolah dengan software program Excell.

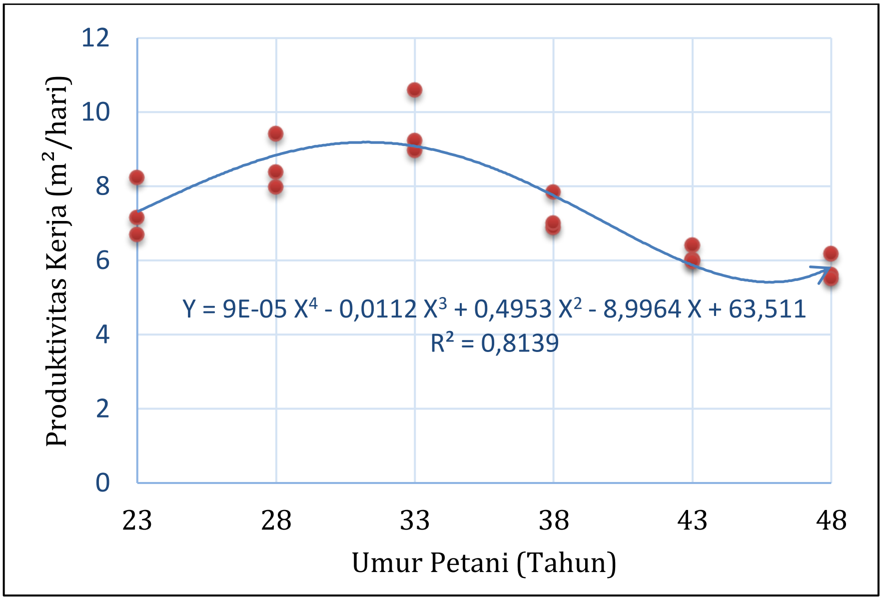
Tabel 3.13.
Data untuk Analisis Regresi Kuartik Pengaruh Umur Petani (X) terhadap Produktivitas Kerja (Y)

No.	X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	Y_i
1	23	529	12167	279841	6.70
2	23	529	12167	279841	7.16
3	23	529	12167	279841	8.24
4	28	784	21952	614565	9.41
5	28	784	21952	614656	8.38
6	28	784	21952	614656	7.97
7	33	1089	35937	1185921	10.59
8	33	1089	35937	1185921	8.97
9	33	1089	35937	1185921	9.22
10	38	1444	54872	2085136	7.84
11	38	1444	54872	2085136	6.88
12	38	1444	54872	2085136	7.01
13	43	1849	79507	3418801	6.41
14	43	1849	79057	3418801	6.02
15	43	1849	79507	3418801	5.97
16	48	2304	110592	5308416	6.18
17	48	2304	110592	5308416	5.62
18	48	2304	110592	5308416	5.52

Dengan bantuan menggunakan software program Excell, maka dapat dibuat kurva kuartik dari pengaruh umur petani (X) terhadap produktivitas kerja (X).

Berdasarkan hasil analisis tersebut, maka diperoleh persamaan regresi kuartik : $Y = 63{,}511 - 8{,}9964\ X + 0{,}4953\ X^2 - 0{,}0112\ X^3 +$

0,00009 X^4 dan koefisien determinasi kuarttik (R^2) = 0,81 (Gambar 3.11).



Gambar 3.11.
Pengaruh Umur Petani (Tahun) terhadap Produktivitas Kerja (m^2/hari) secara Kuartik

3.4.1.5. Model kuintik

Variabel X_i^2 ; X_i^3 ; X_i^4 dan X_i^5 pada Tabel 3.14 merupakan variabel X_i yang dipangkatkan 2 ; 3 ; 4 dan 5. Berikut data yang dipersiapkan untuk analisis regresi kuintik dan akan diolah dengan software program Excell.

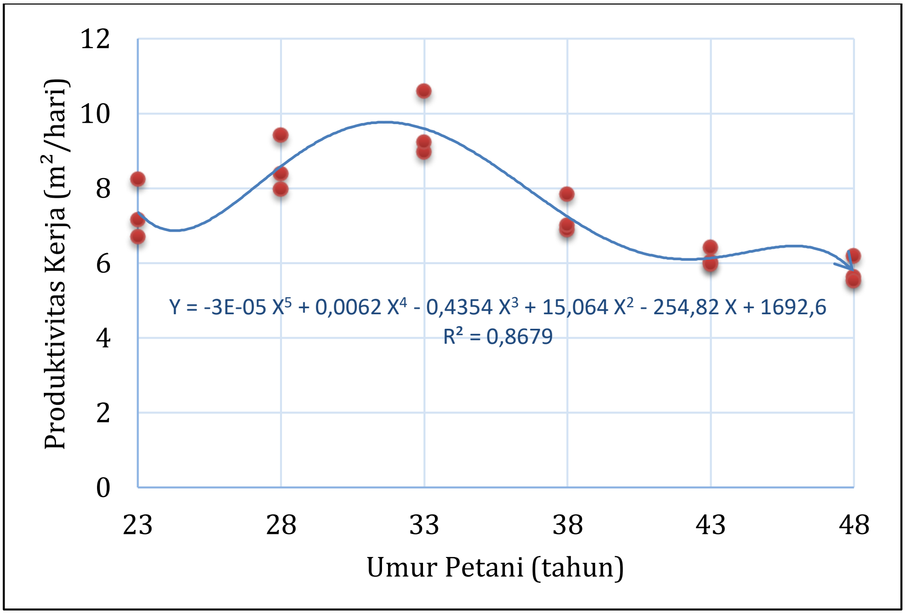
Tabel 3.14.
Data untuk Analisis Regresi Kuintik Pengaruh Umur Petani (X) terhadap Produktivitas Kerja (Y)

No.	X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	X_i^5	Y_i
1	23	529	12167	279841	6436343	6,70
2	23	529	12167	279841	6436343	7,16
3	23	529	12167	279841	6436343	8,24
4	28	784	21952	614565	17210368	9,41
5	28	784	21952	614656	17210368	8,38
6	28	784	21952	614656	17210368	7,97
7	33	1089	35937	1185921	39135393	10,59
8	33	1089	35937	1185921	39135393	8,97
9	33	1089	35937	1185921	39135393	9,22
10	38	1444	54872	2085136	79235168	7,84
11	38	1444	54872	2085136	79235168	6,88
12	38	1444	54872	2085136	79235168	7,01
13	43	1849	79507	3418801	147008443	6,41
14	43	1849	79057	3418801	147008443	6,02
15	43	1849	79507	3418801	147008443	5,97
16	48	2304	110592	5308416	254803968	6,18
17	48	2304	110592	5308416	254803968	5,62
18	48	2304	110592	5308416	254803968	5,52

Dengan bantuan software program Excell, maka dapat dibuat kurva kuintik dari pengaruh umur petani (X) terhadap produktivitas kerja (X).

Berdasarkan hasil analisis tersebut, maka diperoleh persamaan regresi kuartik : $Y = 1692{,}6 – 254{,}82\,X + 15{,}064\,X^2 - 0{,}4354\,X^3 + 0{,}0062$

X^4 – 0,00003 X^5 dan koefisien determinasi kuarttik (R^2) = 0,86 (Gambar 3.12).



Gambar 3.12.
Pengaruh Umur Petani (Tahun) terhadap Produk-tivitas Kerja (m^2/hari) secara Kuintik

Berdasarkan perhitungan dari 4 model regresi di atas, maka dapat dibuat Tabel 3.15 berikut.

Tabel 3.15.
Nilai R^2 dari 4 model regresi

No.	Model Regresi Polinomial	Koefisien Determinasi (R^2)
1	Linier	0,36
2	Kuadratik	0,63
3	Kubik	0,79
4	Kuartik	0,81
5	Kuintik	0,86

Dari Tabel 3.15 di atas menunjukkan bahwa persamaan regresi kuintik menghasilkan R^2 paling tinggi yaitu 0,86 berarti model regresi kuintik merupakan model yang terbaik untuk menjelaskan pengaruh umur pekerja terhadap produktifitas kerjanya.

3.4.2. Penentuan model dengan analisis varian

Untuk mengetahui model regresi yang paling tepat, maka disiapkan data pada Tabel 3.7 untuk diolah dengan Excell.

Tabel 3.7.
Data Pengamatan dengan RAL

Perlakuan	Ulangan			Jumlah	Rerata
	1	2	3		
T_1	6,70	7,16	8,24	22,10	7,37
T_2	9,41	8,38	7,97	25,76	8,59
T_3	10,59	8,97	9,22	28,78	9,59
T_4	7,84	6,88	7,01	21,73	7,24
T_5	6,41	6,02	5,97	18,40	6,13
T_6	6,18	5,62	5,52	17,32	5,77
				134,09	7,45

Menghitung faktor koreksi (FK) = $\frac{(134{,}09)^2}{3 \text{ x } 6}$ = 998,896

Menghitung jumlah kuadrat (JK) :

1. JK total (JKt) = $(6{,}7^2 + 7{,}16^2 + ... + 5{,}52^2)$ - 998,896
   = 31,44109

2. JK perlakuan (JKP) = $\frac{(7{,}37^2 + 8{,}59^2 + \cdots + 5{,}77^2}{3}$ - 998,896

   = 36,22469

Tabel 3.8 berikut dipersiapkan untuk menghitung jumlah kuadrat dari masing- masing model regresi. Derajad bebas perlakuan (DBP) = T - 1 = 6- 1 = 5, maka JK regresi (JKR) yang dapat dihitung yaitu : JKR linier (JKR A), JKR kuadratik (JKR B), JKR kubik (JKR C), JKR kuartik (JKR D) dan JKR kuintik (JKR E).

Tabel 3.8.
Orthogonal polinomial untuk interval perlakuan sama pada perlakuan T

Trend Regresi	Perlakuan						Dev. X^2
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
A = Linier	-5	-3	-1	+1	+3	+5	70
B = Kuadratik	+5	-1	-4	-4	-1	+5	84
C = Kubik	-5	+7	+4	-4	-7	+5	180
D = Kuartik	+1	-3	+2	+2	-3	+1	28
E = Kuintik	-1	+5	-10	+10	-5	+1	252
Total	22,1	25,76	28,78	21,73	18,4	17,32	

3. Jumlah Kuadrat Regresi (JKR) :

a. JKR A $= \dfrac{\sum (-5 \text{ x } 22{,}1) + \cdots + (+5 \text{ x } 17{,}32)^2}{3 \text{ x } 70} = 13{,}39134$

b. JKR B $= \dfrac{\sum (+5 \text{ x } 22{,}1) + \cdots + (+5 \text{ x } 17{,}32)^2}{3 \text{ x } 84} = 9{,}566706$

c. JKR C $= \dfrac{\sum (-5 \text{ x } 22{,}1) + \cdots + (+5 \text{ x } 17{,}32)^2}{3 \text{ x } 180} = 5{,}770134$

d. JKR D $= \dfrac{\sum (+1 \text{ x } 22{,}1) + \cdots + (+1 \text{ x } 17{,}32)^2}{3 \text{ x } 28} = 0{,}754305$

e. JKR E $= \dfrac{\sum (-1 \text{ x } 22{,}1) + \cdots + (+1 \text{ x } 17{,}32)^2}{3 \text{ x } 252} = 1{,}958612$

4. JK galat (JKG) = 36,22469 - 31,44109 = 4,7836

Menghitung derajad bebas (DB) :

1. DB Perlakuan (DBP) = 6 – 1 = 5
2. DB Regresi (DBR) = 1 (terdefinisi)
3. DB Total (DBt) = (6 x 3) -1 17
4. DB Galat (DBG) = 17 – 5 = 12

Menghitung kuadrat tengah (KT) :

1. KT perlakuan (KTP) $= \dfrac{31,44109}{5} = 6,288219$

2. KT regresi linier (KTR_A) $= \dfrac{13,39134}{1} = 13,39134$

   KT regresi kuadratik (KTR_B) $= \dfrac{9,566706}{1} = 9,566706$

   KT regresi kubik (KTR_C) $= \dfrac{5,770134}{1} = 5,770134$

   KT regresi kuartik (KTR_D) $= \dfrac{0,754305}{1} = 0,754305$

   KT regresi kuintik (KTR_E) $= \dfrac{1,958612}{1} = 1,958612$

3. KT galat (KTG) $= \dfrac{4,7836}{12} = 0,398633$

Menghitung F. hitung (F hit.):

1. F hitung perlakuan (F hit. P) $= \dfrac{6,288219}{0,398633} = 15,774$

2. F hitung linier (F hit. A) $= \dfrac{13{,}39134}{0{,}398633} = 33{,}593$

   F hitung kuadratik (F hit. B) $= \dfrac{9{,}566706}{0{,}398633} = 23{,}998$

   F hitung kubik (F hit. C) $= \dfrac{5{,}770134}{0{,}398633} = 14{,}474$

   F hitung kuartik (F hit. D) $= \dfrac{0{,}754305}{0{,}398633} = 1{,}892$

   F hitung kuartik (F hit. D) $= \dfrac{1{,}958612}{0{,}398633} = 4{,}913$

Tabel 3.9.
Analisis Ragam

Sumber ragam (SR)	Derajad Bebas (DB)	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F hitung	T tabel 5%
Perlakuan	5	31,44109	6,28821	15,774*	3,11
Linier	1	13,39134	13,39134	33,593*	4,75
Kuadratik	1	9,56670	9,56670	23,998*	4,75
Kubik	1	5,77013	5,77013	14,474*	4,75
Kuartik	1	0,75430	0,75430	1,892n	4,75
Kuintik	1	1,95861	1,95861	4,913*	4,75
Galat	12	4,78360			
Total	17	36,22469			

Keterangan :

* = Berpengaruh nyata,

n = Tidak berpengaruh nyata

Kesimpulan :

Model regresi kuintik (order 5) masih nyata, maka model regresi kuintik merupakan regresi yang paling tepat untuk menjelaskan pengaruh umur petani (tahun) terhadap produktivitas kinerja (m^2/hari). F hitung regresi kuintik sebesar 4,913 > F tabel 5% (12) sebesar 4,75.

BAB 4

ANALISIS REGRESI NON LINIER

4.1. Pendahuluan

Hubungan linier yang telah dibahas pada Bab 1 merupakan bentuk yang paling sederhana dari hubungan antara dua variabel. Apabila diketahui hubungan antara variabel bebas (X) dengan variabel tergantung (Y) bersifat non linier (misalnya : kuadratik) namun pada kisaran tertentu hubungannya bersifat linier saat sebelum mencapai Y maksimum.

Pada pengujian dosis pupuk urea, maka akan dijumpai suatu peningkatan produksi padi akibat dari ditingkatkannya dosis pupuk urea sampai dosis tertentu pada dosis optimum. Pemupukan melewati dosis optimum, maka menyebabkan produksi justru makin berkurang dan akhirnya produksi menjadi menurun dengan makin bertambahnya dosis pupuk.

Jika berpikir hanya terpusat pada dosis rendah sampai menengah, maka model regresi linier cukup dapat mewakili gambaran hubungan antara dosis pupuk dan produksi. Namun untuk dosis-dosis yang lebih tinggi dibutuhkan suatu model regresi non linier untuk menyatakan hubungan tersebut.

Banyak sekali model regresi non linier yang dapat digunakan untuk menyatakan hubungan antara dua variabel atau lebih. Untuk menganalisis data hasil penelitian harus ditentukan terlebih dahulu kurva yang paling tepat dalam mengekspresikan data yang diwakili.

Pekerjaan ini bukan pekerjaan mudah, bahkan kadang-kadang tidak dapat dilakukan. Pengalaman maupun informasi yang diperoleh dari sumber-sumber pustaka akan mampu memilih salah satu tipe kurva yang lebih logis dari model kurva yang lain. Usaha untuk mendapatkan suatu bentuk kurva atau model yang paling tepat merupakan bagian yang paling penting dari suatu penelitian, agar sesuatu yang sedang dijelaskan tidak akan menjadi bias.

Berbagai tipe kurva pada Bab 4 ini hanya akan dibahas beberapa tipe yang sering digunakan dalam penelitian, yaitu : trend eksponensial (perpangkatan), logistik, dan sigmoid.

4.2. Trend eksponensial (perpangkatan)

Beberapa jenis trend non linier, caranya diubah dulu menjadi linier dengan mentranformasi (perubahan bentuk). Misalkan diasumsikan bahwa hubungan antara X dan Y mengikuti trend eksponensial.

4.2.1. Fungsi $Y = ab^X$

Jika diasumsikan bahwa hubungan antara variabel X dan Y mengikuti fungsi :

$$Y = ab^X$$

Maka fungsi tersebut dapat diubah menjadi trend linier dalam semi log menjadi :

$$\log Y = \log a + (\log b)\, X.$$

Keterangan :

$$y = \text{Log } Y,\ \ a' = \log a,\ b' = \log b, \text{ dan } x = X.$$

Menjadi :

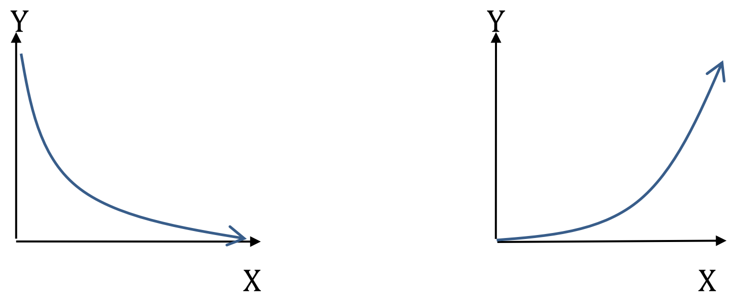
$$y = a' + b'\, x.$$

Keterangan :

- Nilai a dan b dapat dicari berdasarkan persamaan normal.

- Nilai a diperoleh dengan cara anti log a = $10^{a'}$,
- Nilai b dengan cara anti log b = $10^{b'}$.

Trend eksponensial ini sering digunakan untuk meramalkan jumlah penduduk produktif, hasil penjualan dan kejadian lain yang pertumbuhannya bersifat geometris (berkembang dengan cepat sekali). Untuk lebih jelasnya dapat dilihat Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1.
Kurva Fungsi : Y = ab^X

Tabel 4.1.
Struktur Data Transformasi Variabel X dan Y ke Log

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	X_1	Y_1	$x_1 = X_1$	$y_1=\log(Y_1)$
2	X_2	Y_2	$x_2 = X_2$	$y_2=\log(Y_2)$
3	X_3	Y_3	$x_3 = X_3$	$y_3=\log(Y_3)$
4	X_4	Y_4	$x_4 = X_4$	$y_4=\log(Y_4)$
5	X_5	Y_5	$x_5 = X_5$	$y_5=\log(Y_5)$
6	X_6	Y_6	$x_6 = X_6$	$y_6=\log(Y_6)$
N	X_n	Y_n	$x_n = X_n$	$y_n=\log(Y_n)$

Tabel 4.2.
Data Variabel X dan Y dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1	y_1^2
2	x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2	y_2^2
3	x_3	y_3	x_3^2	x_3y_3	y_3^2
4	x_4	y_4	x_4^2	x_4y_4	y_4^2
5	x_5	y_5	x_5^2	x_5y_5	y_5^2
6	x_6	y_6	x_6^2	x_6y_6	y_6^2
N	x_n	y_n	x_n^2	x_ny_n	y_n^2
Jumlah	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_iy_i	Σy_i^2

Contoh 1.

Suatu penelitian untuk mengetahui pengaruh dosis fungisida (X) dalam % dan tingkat serangan jamur (Y) dalam satuan % pada ketinggian tanah yang berbeda. Adapun data hasil pengamatan (Tabel 4.3) berikut.

Tabel 4.3.
Hubungan Dosis Fungisida (%) dan Tingkat Serangan Jamur (%) pada Ketinggian Tanah yang Berbeda

Dosis Fungida (%)	Serangan jamur (%)		
	Dataran rendah	Dataran sedang	Dataran tinggi
0	60	70	85
7	28	31	37
14	12	16	17
21	6	7	6
28	2	3	3
35	1	1	1

Persamaan fungsi eksponensial diselesaikan per ketinggian permukaan tanah, dalam hal ini ada tiga ketinggian tempat.

1. Tanah dataran rendah

Tabel 4.4.
Tranformasi Tingkat Serangan Jamur (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	$y_i = \log(Y_i)$
1	0	60	0	Log (60)
2	7	28	7	Log (28)
3	14	12	14	Log (12)
4	21	6	21	Log (6)
5	28	2	28	Log (2)
6	35	1	35	Log (1)

Tabel 4.5.
Data Tingkat Serangan Penyakit (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	1,77815	0	0,00000	3,16182
2	7	1,44716	49	10,13011	2,09427
3	14	1,07918	196	15,10854	1,16463
4	21	0,77815	441	16,34118	0,60552
5	28	0,30103	784	8,42884	0,09062
6	35	0,00000	1.225	0,00000	0,00000
Jumlah	105	5,38367	2.695	50,00866	7,11686

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 50{,}00866) - (105\ x\ 5{,}38367)}{(6\ \ x\ 2695) - (105)^2}$$

$$= 0{,}0516$$

Anti log koefisien regresi b' :

b = Anti log b'

$= 10^{0{,}0516}$

$= 0{,}8881$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5{,}38367}{6} - \frac{0{,}0516\ x\ 105}{6}$$

$$= 1{,}7994$$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{1{,}7994}$

$= 63{,}0135$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah dataran rendah yaitu:

$$Y = 63{,}0135\ \ (0{,}8881)^X$$

2. Tanah dataran sedang

Tabel 4.6.
Tranformasi Tingkat Serangan Jamur (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	$y_i = \log(Y_i)$
1	0	70	0	Log (70)
2	7	31	7	Log (31)
3	14	16	14	Log (16)
4	21	7	21	Log (7)
5	28	3	28	Log (3)
6	35	1	35	Log (1)

Tabel 4.7.
Data Tingkat Serangan Penyakit (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	1,84510	0	0,00000	3,40439
2	7	1,49136	49	10,43953	2,22416
3	14	1,20412	196	16,85768	1,44990
4	21	0,84510	441	17,74706	0,71419
5	28	0,47712	784	13,35940	0,22764
6	35	0,00000	1.225	0,00000	0,00000
Jumlah	105	5,86280	2.695	58,40367	8,02029

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x\,\Sigma y)}{(n\,\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6 \text{ x } 58{,}40367) - (105 \text{ x } 5{,}86280)}{(6 \text{ x } 2.695) - (105)^2}$$

$= 0{,}0515$

Anti log koefisien regresi b' :

$$b = \text{Anti log } b'$$
$$= 10^{0{,}0515}$$
$$= 0{,}8881$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$
$$= \frac{5{,}86280}{6} - \frac{0{,}0515 \text{ x } 105}{6}$$
$$= 1{,}8791$$

Konstanta a :

$$a = \text{Anti log } a'$$
$$= 10^{1{,}8791}$$
$$= 75{,}6969$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah dataran sedang yaitu:

$$Y = 75{,}6969\ (0{,}8881)^X$$

3. Tanah dataran tinggi

Tabel 4.8.
Tranformasi Tingkat Serangan Jamur (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	y_i = log (Y_i)
1	0	85	0	Log (85)
2	7	37	7	Log (37)
3	14	17	14	Log (17)
4	21	6	21	Log (6)
5	28	3	28	Log (3)
6	35	1	35	Log (1)

Tabel 4.9.
Data Tingkat Serangan Penyakit (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	1,92942	0	0,00000	3,72266
2	7	1,56820	49	10,97741	2,45926
3	14	1,23045	196	17,22628	1,51400
4	21	0,77815	441	16,34118	0,60552
5	28	0,47712	784	13,35940	0,22764
6	35	0,00000	1.225	0,00000	0,00000
Jumlah	105	5,98334	2.695	57,90427	8,52908

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6 \ \text{x}\ 57{,}90427) - (105 \ \text{x}\ 5{,}98334)}{(6 \ \text{x}\ 2.695) - (105)^2}$$

$$= 0{,}0546$$

Anti log koefisien regresi b' :

$$\begin{aligned} b &= \text{Anti log } b' \\ &= 10^{0{,}0546} \\ &= 0{,}8819 \end{aligned}$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5{,}98334}{6} - \frac{0{,}0546 \ \text{x}\ 105}{6}$$

$$= 1{,}9524$$

Konstanta a :

$$\begin{aligned} a &= \text{Anti log } a' \\ &= 10^{1{,}9524} \\ &= 89{,}6214 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah dataran sedang yaitu:

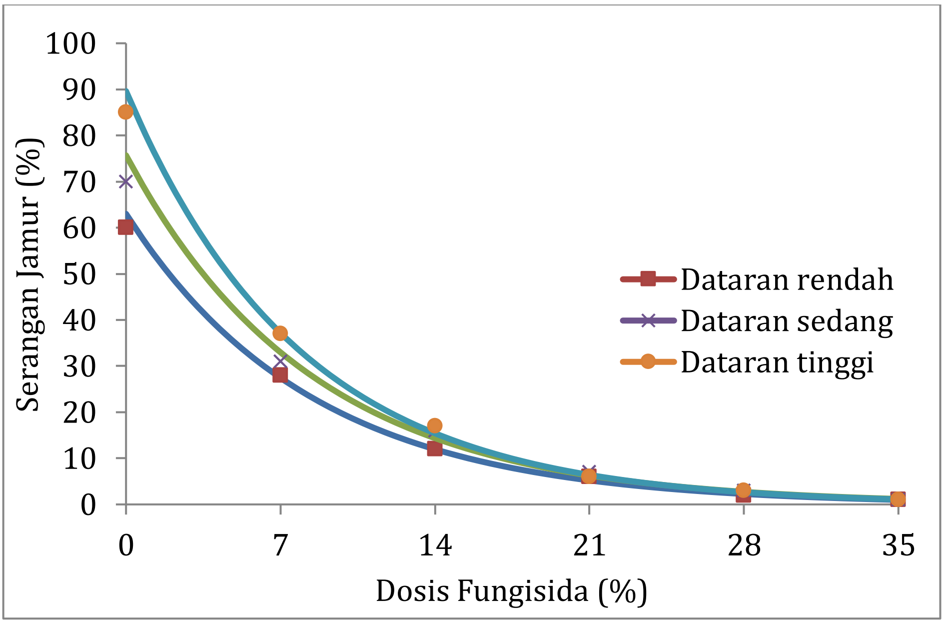
$$Y = 89{,}6214\ (0{,}8819)^X.$$

Atas dasar analisis regresi pada ketiga ketinggian tempat di atas, maka didapatkan tiga persamaan fungsi eksponensial.

1. Tanah dataran rendah : $Y = 63{,}0135\ (0{,}8881)^X$
2. Tanah dataran sedang : $Y = 75{,}6969\ (0{,}8881)^X$

3. Tanah dataran tinggi : $Y = 89{,}6214\ (0{,}8819)^X$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva eksponensial seperti pada Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.2.
Pengaruh Dosis Fungisida (%) terhadap Serangan Jamur (%) pada Berbagai Ketinggian Tempat.

Contoh 2.

Penelitian tentang hubungan umur teki (X) dalam hari dan tingkat kemampuan kompetisi (Y) dalam satuan % pada berbagai jenis tanah. Adapun data hasil pengamatan (Tabel 4.10).

Tabel 4.10.
Hubungan Umur Teki (Hari) dan Tingkat Kemampuan Kompetisi (%) pada Berbagai Jenis Tanah

Umur (hari)	Kemampuan kompetisi (%)		
	Vulkanik	Alluvial	Pasir
0	1	1	1
7	2	3	3
14	6	7	6
21	12	16	17
28	28	31	37
35	60	70	85

Persamaan fungsi eksponensial diselesaikan per jenis tanah, dalam hal ini ada tiga jenis tanah:

1. Tanah Vulkanik

Tabel 4.11.
Tranformasi Kemampuan Kompetisi (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	$y_i = \log(Y_i)$
1	0	1	0	Log (1)
2	7	2	7	Log (2)
3	14	6	14	Log (6)
4	21	12	21	Log (12)
5	28	28	28	Log (28)
6	35	60	35	Log (60)

Tabel 4.12.
Data Tingkat Kemampuan Kompetisi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	0,00000	0	0,00000	0,00000
2	7	0,30103	49	2,10721	0,09062
3	14	0,77815	196	10,89412	0,60552
4	21	1,07918	441	22,66281	1,16463
5	28	1,44716	784	40,52042	2,09427
6	35	1,77815	1.225	62,23529	3,16182
Jumlah	105	5,38367	2.695	138,41985	7,11686

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \text{x}\ 138{,}41985) - (105\ \text{x}\ 5{,}38367)}{(6\ \text{x}\ 2.695) - (105)^2}$$

$$= 0{,}0516$$

Anti log koefisien regresi b' :

b = Anti log b'

$= 10^{0{,}0516}$

= 1,1260

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5{,}38367}{6} - \frac{0{,}0516 \text{ x } 105}{6}$$

$$= -0{,}0049$$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{-0{,}049}$

$= 0{,}9888$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah vulkanik, yaitu:

$$Y = 0{,}9888\ (1{,}1260)^X$$

2. Tanah Alluvial

Tabel 4.13.

Tranformasi Tingkat Kemampuan Kompetisi (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	$y_i = \log(Y_i)$
1	0	1	0	Log (1)
2	7	3	7	Log (3)
3	14	7	14	Log (7)
4	21	16	21	Log (16)
5	28	31	28	Log (31)
6	35	70	35	Log (70)

Tabel 4.14.
Data Tingkat Kemampuan Kompetisi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	0	0,00000	0	0,00000	0,00000
2	7	0,47712	49	3,33985	0,22764
3	14	0,84510	196	11,83137	0,71419
4	21	1,20412	441	25,28652	1,44990
5	28	1,49136	784	41,75813	2,22416
6	35	1,84510	1.225	64,57843	3,40439
Jumlah	105	5,86280	2.695	146,79430	8,02029

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 146{,}79430) - (105\ x\ 5{,}86280)}{(6\ \ x\ 2.695) - (105)^2}$$

$$= 0{,}0515$$

Anti log koefisien regresi b' :

$$b = \text{Anti log } b'$$

$$= 10^{0{,}0515}$$

$$= 1{,}1260$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5,86280}{6} - \frac{0,0515 \times 105}{6}$$

$= 0,0752$

Konstanta a :

a = Anti log a’

$= 10^{0,0752}$

$= 1,1890$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah Alluvial yaitu:

$$Y = 1,1890\ (1,1260)^{X}$$

3. Tanah Pasir

Tabel 4.15.
Tranformasi Tingkat Kemampuan Kompetisi (Y) ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = X_i$	$y_i = \log(Y_i)$
1	0	1	0	Log (1)
2	7	3	7	Log (3)
3	14	6	14	Log (6)
4	21	17	21	Log (17)
5	28	37	28	Log (37)
6	35	85	35	Log (85)

Tabel 4.16.
Data Tingkat Kemampuan Kompetisi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	0,00000	0	0,00000	0,00000
2	7	0,47712	49	3,33985	0,22764
3	14	0,77815	196	10,89412	0,60552
4	21	1,23045	441	25,83943	1,51400
5	28	1,56820	784	43,90965	2,45926
6	35	1,92942	1.225	67,52966	3,72266
Jumlah	105	5,98334	2.695	151,51270	8,52908

Koefisien regresi b' :

$$b' = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x\,\Sigma y)}{(n\,\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \text{x}\ 151{,}5127) - (105\ \text{x}\ 5{,}98334)}{(6\ \text{x}\ 2.695) - (105)^2}$$

$$= 0{,}0546$$

Anti log koefisien regresi b' :

$$b = \text{Anti log } b'$$

$$= 10^{0{,}05456}$$

$$= 1{,}1339$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5,98334}{6} - \frac{0,0546 \times 105}{6}$$

$$= 0,0420$$

Konstanta a :

$$a = \text{Anti log } a'$$
$$= 10^{0,0420}$$
$$= 1,1016$$

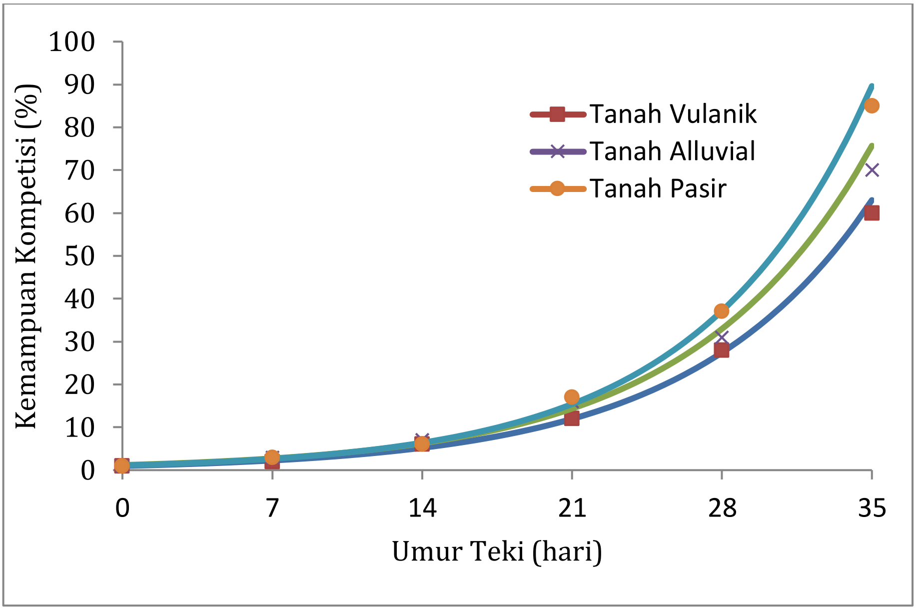
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanah pasir, yaitu:

$$Y = 1,1016 \ (1,1339)^X$$

Atas dasar analisis regresi pada ketiga ketinggian tempat di atas, maka didapatkan tiga persamaan fungsi eksponensial sebagai berikut.

1. Tanah Vulkanik : $Y = 0,9888 \ (1,1260)^X$
2. Tanah Alluvial : $Y = 1,1890 \ (1,1260)^X$
3. Tanah Pasir : $Y = 1,1016 \ (1,1339)^X$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva eksponensial seperti pada Gambar 4.3 berikut.



Gambar 4.3.
Hubungan Umur Teki (hari) dan Kemampuan Kompetisi (%) pada Berbagai Jenis Tanah

4.2.2. Fungsi $Y = aX^b$,

Diasumsikan hubungan variabel X dan Y mengikuti fungsi:

$$Y = aX^b$$

Diasumsikan bahwa variabel X selalu positif. $Y = aX^b$ dapat diubah menjadi bentuk aditifnya melalui tranformasi logaritma, sehingga menjadi :

$$\text{Log } Y = \log a + b \log X.$$

Diasumsikan :

$$y = \text{Log } Y,\ a' = \log a \text{ dan } x = \log X,$$

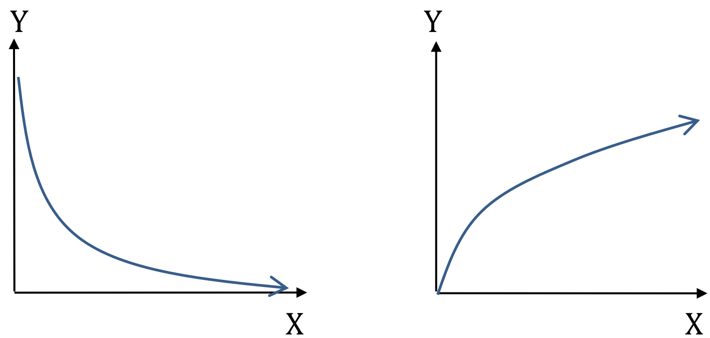
Maka didapatkan bentuk persamaan garis linier sederhana sebagai berikut :

$$y = a' + bx.$$

Keterangan :

- Nilai a diperoleh dengan cara anti log a = $10^{a'}$,
- Nilai b pada persamaan regresi linier sederhana tetap, karena merupakan fungsi perpangkatannya.

Untuk a > 0, terdapat tiga buah kemungkinan grafik dari model ini untuk berbagai harga b, dapat dilihat pada Gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.4.
Kurva fungsi : $Y = aX^b$

Struktur data untuk menyelesaikan perhitungan dari fungsi eksponensial :

$$Y = aX^b.$$

Jika variabel X selalu positif, maka $Y = aX^b$ diubah menjadi bentuk aditifnya melalui tranformasi logaritma menjadi :

$$\text{Log } Y = \log a + b \log X.$$

Keterangan :

$$y = \log Y,\ a' = \log a,\ \text{dan}\ x = \log X$$

Maka persamaan berubah menjadi persamaan linier sederhana:

$$y = a' + bx.$$

Untuk menjadi bentuk fungsi eksponensial, maka nilai a = anti log a' atau $a = 10^{a'}$.

Tabel 4.17.
Struktur Data Transformasi Variabel X dan Y ke Log

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	X_1	Y_1	x_1=log(X_1)	y_1=log(Y_1)
2	X_2	Y_2	x_2=log(X_2)	y_2=log(Y_2)
3	X_3	Y_3	x_3=log(X_3)	y_3=log(Y_3)
4	X_4	Y_4	x_4=log (X_4)	y_4=log(Y_4)
5	X_5	Y_5	x_5=log(X_5)	y_5=log(Y_5)
6	X_6	Y_6	x_6=log(X_6)	y_6=log(Y_6)
N	X_n	Y_n	x_n=log(X_n)	y_n=log(Y_n)

Tabel 4.18.
Data Variabel X dan Y dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1	y_1^2
2	x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2	y_2^2
3	x_3	y_3	x_3^2	x_3y_3	y_3^2
4	x_4	y_4	x_4^2	x_4y_4	y_4^2
5	x_5	y_5	x_5^2	x_5y_5	y_5^2
6	x_6	y_6	x_6^2	x_6y_6	y_6^2
N	x_n	y_n	x_n^2	x_ny_n	y_n^2
Jumlah	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_iy_i	Σy_i^2

Contoh 1.

Suatu penelitian untuk mengetahui hubungan waktu (X) dalam menit dan kecepatan infiltrasi (Y) dalam satuan cc/menit pada tiga jenis tanah. Adapun data hasil pengamatan kecepatan infiltrasi (Tabel 4.19) berikut.

Tabel 4.19.
Hubungan Waktu (Menit) dan Kecepatan Infiltrasi (cc/menit) pada Tiga Jenis Tanah

Waktu (menit)	Kecepatan Infiltrasi (cc/menit)		
	Tanah A	Tanah B	Tanah C
1	29	40	55
2	8	12	18
3	4	6	9
4	3	4	6
5	2	3	3
6	1	1	2

Persamaan fungsi eksponensial diselesaikan per jenis tanah, dalam hal ini ada tiga jenis tanah :

1. Tanah A

Tabel 4.20.
Tranformasi Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	x_i= log (X_i)	y_i = log (Y_i)
1	1	29	Log (1)	Log (29)
2	2	8	Log (2)	Log (8)
3	3	4	Log (3)	Log (4)
4	4	3	Log (4)	Log (3)
5	5	2	Log (5)	Log (2)
6	6	1	Log (6)	Log (1)

Tabel 4.21.
Data Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	1,46240	0,00000	0,00000	2,13861
2	0,30103	0,90309	0,09062	0,27186	0,81557
3	0,47712	0,60206	0,22764	0,28726	0,36248
4	0,60206	0,47712	0,36248	0,28726	0,22764
5	0,69897	0,30103	0,48856	0,21041	0,09062
6	0,77815	0,00000	0,60552	0,00000	0,00000
Jumlah	2,85733	3,74570	1,77482	1,05678	3,63492

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 1{,}05678) - (2{,}85733\ x\ 3{,}74570)}{(6\ \ x\ 1{,}77485) - (2{,}85733)^2}$$

$$= -1.7557$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{3{,}74570}{6} - \frac{-1{,}7557\ x\ 2{,}85733}{6}$$

$$= 1{,}4604$$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{1,4604}$
$= 28,8645$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada jenis tanah A yaitu:

$$Y = 28,8645\ X^{-1,7557}$$

2. Tanah B

Tabel 4.22.
Tranformasi Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	$x_i = \log(X_i)$	$y_i = \log(Y_i)$
1	1	40	Log (1)	Log (40)
2	2	12	Log (2)	Log (12)
3	3	6	Log (3)	Log (6)
4	4	4	Log (4)	Log (4)
5	5	3	Log (5)	Log (3)
6	6	1	Log (6)	Log (1)

Tabel 4.23.
Data Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	1,60206	0,00000	0,00000	2,56660
2	0,30103	1,07918	0,09062	0,32487	1,16463
3	0,47712	0,77815	0,22764	0,37127	0,60552
4	0,60206	0,60206	0,36248	0,36248	0,36248
5	0,69897	0,47712	0,48856	0,33349	0,22764
6	0,77815	0,00000	0,60552	0,00000	0,00000
Jumlah	2,85733	4,53857	1,77482	1,39211	4,92687

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x\,\Sigma y)}{(n\,\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6 \ \text{x}\ 1{,}39211) - (2{,}85733 \ \text{x}\ 4{,}53857)}{(6 \ \text{x}\ 1{,}77485) - (2{,}85733)^2}$$

$= -1.8577$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{4{,}53857}{6} - \frac{-1{,}8577 \ \text{x}\ 2{,}85733}{6}$$

$= 1{,}6411$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{1{,}6411}$

$= 43{,}7629$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada jenis tanah B yaitu:

$$Y = 43{,}7629\ X^{-1{,}8577}$$

3. Tanah C

Tabel 24.
Tranformasi Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi ke dalam Log

No.	X_i	Y_i	x_i= log (X_i)	y_i = log (Y_i)
1	1	55	Log (1)	Log (55)
2	2	18	Log (2)	Log (18)
3	3	9	Log (3)	Log (9)
4	4	6	Log (4)	Log (6)
5	5	3	Log (5)	Log (3)
6	6	2	Log (6)	Log (2)

Tabel 4.25.
Data Waktu (X) dan Kecepatan Infiltrasi (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	1,74036	0,00000	0,00000	3,02886
2	0,30103	1,25527	0,09062	0,37787	1,57571
3	0,47712	0,95424	0,22764	0,45529	0,91058
4	0,60206	0,77815	0,36248	0,46849	0,60552
5	0,69897	0,47712	0,48856	0,33349	0,22764
6	0,77815	0,30103	0,60552	0,23425	0,09062
Jumlah	2,85733	5,50618	1,77482	1,86940	6,43893

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 1{,}86940) - (2{,}85733\ x\ 5{,}50618)}{(6\ \ x\ 1{,}77485) - (2{,}85733)^2}$$

$= -1.8179$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{5{,}50618}{6} - \frac{-1{,}8179 \times 2{,}85733}{6}$$

$= 1{,}7834$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{1{,}7834}$

$= 60{,}7302$

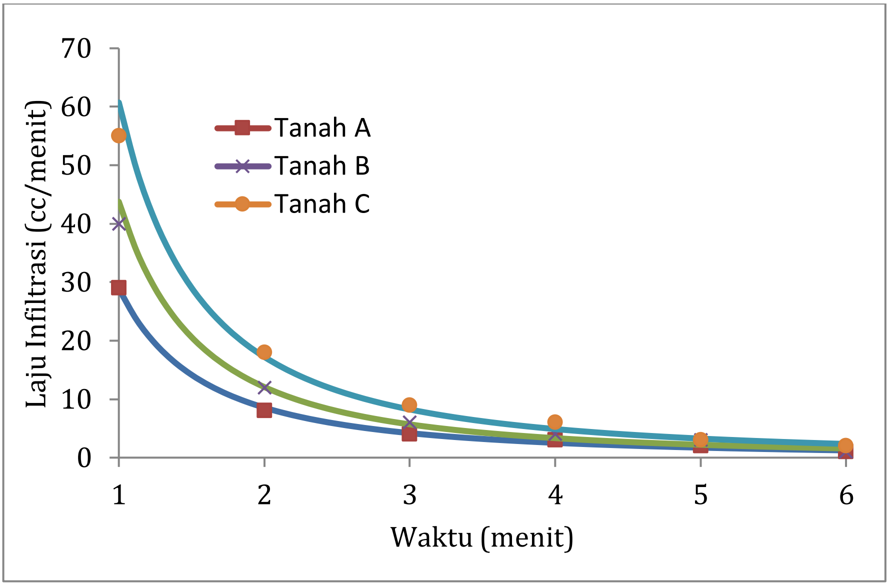
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada jenis tanah B yaitu:

$$Y = 60{,}7302\ X^{-1{,}7834}$$

Atas dasar analisis dari ketiga varietas tanaman tersebut, maka didapatkan tiga persamaan fungsi eksponensial sebagai berikut :

1. Jenis tanah A : $Y = 28{,}8645\ X^{-1{,}7557}$
2. Jenis tanah B : $Y = 43{,}7629\ X^{-1{,}8577}$
3. Jenis tanah C : $Y = 60{,}7302\ X^{-1{,}7834}$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva eksponensial seperti pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5.
Hubungan Waktu (Menit) dan Kecepatan Infiltrasi (cc/menit)

Contoh 2.

Penelitian pengaruh umur tanaman (X) dalam satuan tahun setelah tanam (TST) terhadap diameter tegakan tanaman jati (Y) dalam satuan (cm). Adapun data hasil pengamatan (Tabel 4.26).

Tabel 4.26.
Hubungan Umur Tanaman (Tahun) dan Diameter Batang (cm) pada Tiga Varietas Tanaman Jati

Umur tan. (tahun)	Diameter batang (cm)		
	Varietas A	Varietas B	Varietas C
1	3,00	3,00	3,00
7	11,00	12,00	12,50
14	17,50	19,50	20,00
21	20,90	23,40	24,90
28	25,00	28,00	30,00
35	29,00	32,00	34,00

Persamaan fungsi eksponensial diselesaikan per varietas tanaman, dalam hal ini ada tiga varietas :

1. Varietas A

Tabel 4. 27.
Tranformasi Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang ke dalam Log

No.	X_i	X_i	x_i= log (X_i)	y_i = log (Y_i)
1	1	3,00	Log (1)	Log (3,00)
2	7	11,00	Log (7)	Log (11,00)
3	14	17,50	Log (14)	Log (17,50)
4	21	20,90	Log (21)	Log (20,90)
5	28	25,00	Log (28)	Log (25,00)
6	35	29,00	Log (35)	Log (29,00)

Tabel 4.28.
Data Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang (Y) dalam Log

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	0,47712	0,00000	0,00000	0,22764
2	0,84510	1,04139	0,71419	0,88007	1,08449
3	1,14613	1,24303	1,31361	1,42468	1,54514
4	1,32222	1,32014	1,74826	1,74552	1,74278
5	1,44716	1,39794	2,09427	2,02304	1,95423
6	1,54407	1,46239	2,38415	2,25804	2,13860
Jumlah	6,30467	6,94203	8,25448	8,33136	8,69291

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 8{,}33136) - (6{,}30467\ x\ 6{,}94203)}{(6\ \ x\ 8{,}25448) - (6{,}30467)^2}$$

$$= 0{,}6362$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{6{,}94203}{6} - \frac{0{,}6362\ x\ 6{,}30467}{6}$$

$$= 0{,}4885$$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{0,4885}$

$= 3{,}0795$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanaman varietas A yaitu:

$$Y = 3{,}0795\ X^{0{,}6362}$$

2. Varietas B

Tabel 4.29.
Tranformasi Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang ke dalam Log.

No.	X_i	X_i	$x_i = \log(X_i)$	$y_i = \log(Y_i)$
1	1	3,00	Log (1)	Log (3,00)
2	7	12,00	Log (7)	Log (12,00)
3	14	19,50	Log (14)	Log (19,50)
4	21	23,40	Log (21)	Log (23,40)
5	28	28,00	Log (28)	Log (28,00)
6	35	32,00	Log (35)	Log (32,00)

Tabel 4.30.
Data Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang (Y) dalam Log.

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	0,47712	0,00000	0,00000	0,22764
2	0,84510	1,07918	0,71419	0,91201	1,16463
3	1,14613	1,29003	1,31361	1,47854	1,66419
4	1,32222	1,36922	1,74826	1,81040	1,87475
5	1,44716	1,44716	2,09427	2,09427	2,09427
6	1,54407	1,50515	2,38415	2,32405	2,26548
Jumlah	6,30467	7,16786	8,25448	8,61928	9,29096

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \ x\ 8{,}61928) - (6{,}30467\ x\ 7{,}16786)}{(6\ \ x\ 8{,}25448) - (6{,}30467)^2}$$

$$= 0{,}6673$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{7{,}16786}{6} - \frac{0{,}6362\ x\ 6{,}30467}{6}$$

$$= 0{,}4935$$

Konstanta a :

$$a = \text{Anti log } a'$$
$$= 10^{0{,}4935}$$
$$= 3{,}1151$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanaman varietas A yaitu:

$$Y = 3{,}1151\ X^{0{,}6673}$$

3. Varietas C

Tabel 4.31.
Tranformasi Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang ke dalam Log.

No.	X_i	X_i	x_i= log (X_i)	y_i = log (Y_i)
1	1	3,00	Log (1)	Log (3,00)
2	7	12,50	Log (7)	Log (12,50)
3	14	20,00	Log (14)	Log (20,00)
4	21	24,90	Log (21)	Log (24,90)
5	28	30,00	Log (28)	Log (30,00)
6	35	34,00	Log (35)	Log (34,00)

Tabel 4.32.
Data Umur Tanaman (X) dan Diameter Batang (Y) Dalam Log.

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0,00000	0,47712	0,00000	0,00000	0,22764
2	0,84510	1,09691	0,71419	0,92700	1,20321
3	1,14613	1,30103	1,31361	1,49115	1,69268
4	1,32222	1,39620	1,74826	1,84608	1,94937
5	1,44716	1,47712	2,09427	2,13763	2,18189
6	1,54407	1,53148	2,38415	2,36471	2,34543
Jumlah	6,30467	7,27986	8,25448	8,76656	9,60022

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6 \ \text{x}\ 8{,}76656) - (6{,}30467 \ \text{x}\ 7{,}27986)}{(6 \ \text{x}\ 8{,}25448) - (6{,}30467)^2}$$

$$= 0{,}6854$$

Konstanta a' :

$$a' = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{7{,}27986}{6} - \frac{0{,}6854 \ \text{x}\ 6{,}30467}{6}$$

$$= 0{,}4931$$

Konstanta a :

a = Anti log a'

$= 10^{0,6854}$

= 3,1122

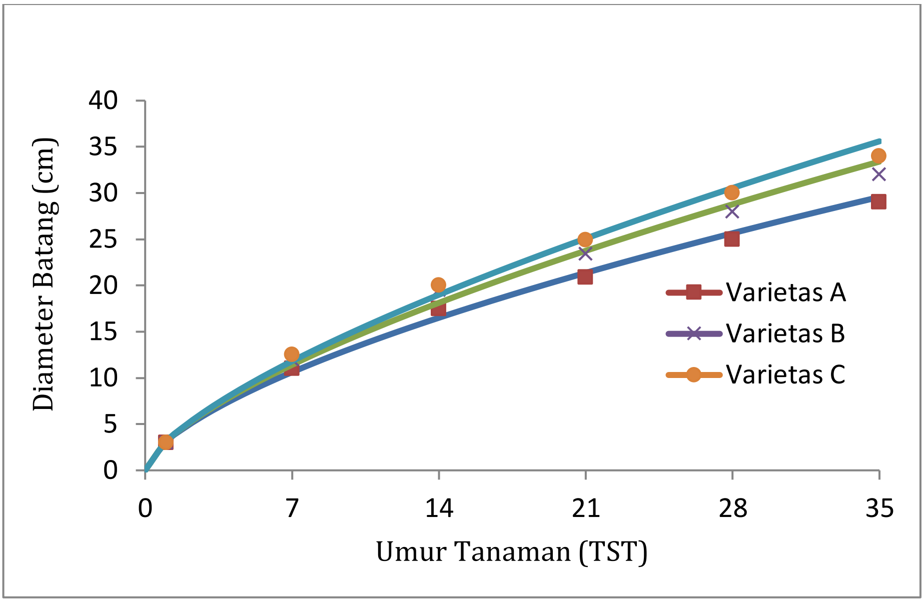
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi eksponensial pada tanaman varietas A yaitu:

$$Y = 3{,}1122\ X^{0{,}6854}$$

Atas dasar analisis dari ketiga varietas tanaman tersebut, maka didapatkan tiga persamaan fungsi eksponensial sebagai berikut :

1. Varietas A : $Y = 3{,}0795\ X^{0{,}6263}$
2. Varietas B : $Y = 3{,}1151\ X^{0{,}6673}$
3. Varietas C : $Y = 3{,}1122\ X^{0{,}6853}$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva eksponensial seperti pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6.
Hubungan Umur Tanaman dan Diameter Batang (cm)

Variasi lain dari model ini disebut "***Double log tranformation***". Terdapat dua macam yaitu :

Bentuk fungsi yang pertama :

$$\text{Log } Y = a + b \text{ Log } X,$$

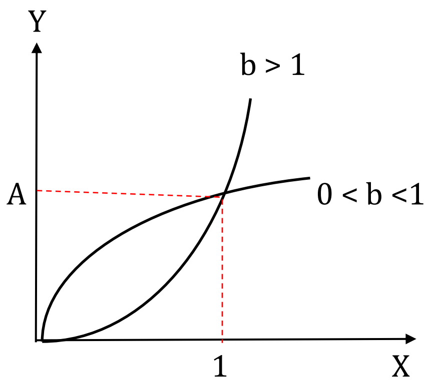
Dan dapat ditulis sebagai :

$$Y = AX^{b}$$

Keterangan :

$$\text{Log } A = a.$$

Dan untuk fungsi ini berlaku : $dy/dx = AbX^{b-1}$, sehingga apabila b > 1, sudut kemiringan akan makin bertambah dengan makin bertambahnya harga X, sedangkan bila 0 < b < 1baik b atau Y akan bergerak ke arah tak terhingga. Berikut bentuk grafik fungsinya (Gambar 4.7).



Gambar 4.7.

Kurva fungsi : Log Y = a + b log X

Bentuk fungsi yang kedua :

$$\text{Log } Y = a - b \log X,$$

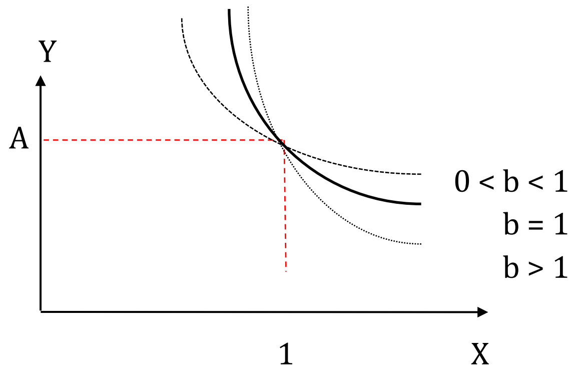
Jika dibuat ke dalam bentuk perpangkatanya menjadi :

$$Y = AX^{-b}$$

Keterangan :

$$\text{Log } A = a, \text{ dan nilai } b = 1,$$

Sehingga menghasilkan suatu "*rectanguler hyperbola*" yaitu locus dari titik-titik hasil koordinat X dan Y merupakan suatu bilangan konstan. Grafik fungsinya dapat dilihat pada Gambar 4.8.

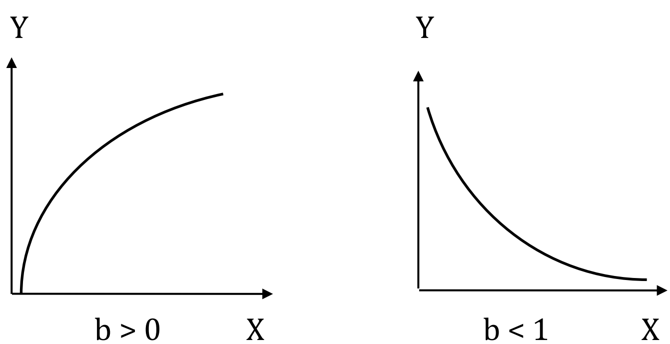


Gambar 4.8.
Kurva Fungsi : Log Y = a - b log X

4.2.3. Fungsi $e^Y = aX^b$

Diasumsikan bahwa hubungan antara variabel X dan Y mengikuti fungsi *logaritmik*. Misalkan fungsi :

$$e^Y = aX^b$$



Gambar 4.9.
Kurva Fungsi : $e^Y = aX^b$

Diasumsikan bahwa variabel X selalu positif (0 < X < ~). Parameter a dan b akan diduga besarnya. Bila kedua sisi persamaan ditransportmasikan ke logaritma naturalnya, akan didapatkan persamaan :

$$Y = \ln a + b \ln X.$$

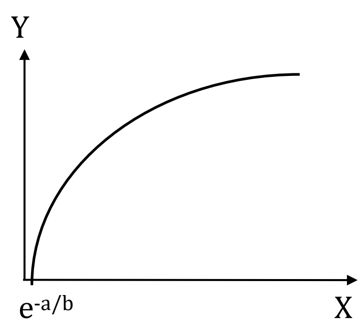
Apabila :

$$\text{Ln } a = a' \text{ dan Ln } X = X',$$

Maka diperoleh persamaan linier sederhana :

$$Y = a' + bX',$$

Penyelesaianya akan serupa dengan regresi linier sederhana dengan kontanta a' dan sudut kemiringan (slope) = b. Terdapat dua buah grafik dari model $e^Y = aX^b$ ini untuk berbagai harga b, dapat dilihat pada Gambar 4.9 di atas.



Gambar 4.10.
Kurva Fungsi : Y = a + b ln X

Bentuk lain dari fungsi logritmik disebut *semi log tranformation* Y = a + b ln X, sehingga : $\frac{d_y}{d_x} = \frac{b}{X}$. Besarnya sudut kemiringan makin berkurang dengan makin bertambahnya harga X. Pada saat Y = 0, maka ln X = $\frac{-2}{b}$, sehingga titik potong kurva dengan sumbu X terletak pada X = $e^{\frac{-a}{b}}$. Inversi dari fungsi ini adalah X = $e^{\frac{-a}{b}}\ e^{\frac{Y}{b}}$ yang dapat ditulis dalam X = AB^Y, dimana A = $e^{\frac{a}{b}}$ dan B = $e^{\frac{1}{b}}$. Fungsi ini sering disebut sebagai "*Steady growth fungtion*" seperti Gambar 4.10 di atas.

4.2.4. Fungsi Y = $\frac{k}{10^{a+bX}+1}$

Trend logistik biasanya dipergunakan untuk mewakili data yang menggambarkan perkembangan atau pertumbuhan yang mula-mula tumbuh dengan cepat sekali tetapi lambat laun agak lambat, kecepatan pertumbuhannya makin berkurang sampai tercapai suatu titik jenuh (*saturation point*). Pertumbuhan semacam ini biasanya banyak dialami oleh pertumbuhan tanaman dan lain-lain.

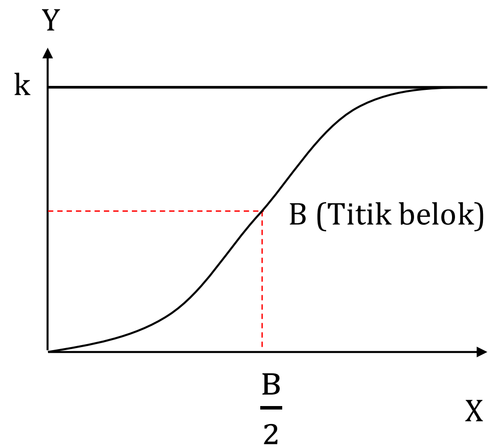
Bentuk trend logistik :

$$Y = \frac{k}{10^{a+bX}+1}$$

Nilai k, a, b = konstan dan biasanya b < 0. Dalam hal ini kalau X → ~, $10^{a + bx}$ → 0 dan Y = k. Jadi k merupakan *asymtote*, yaitu batas atas.

Terlihat pada Gambar 4.11 bahwa terdapat titik infleksi (*inflection point*) pada X = $\frac{B}{2}$. Disebelah kiri sebelum titik B, laju pertumbuhan terjadi dengan cepat sekali dengan bertambahnya nilai X. Setelah melewati titik B, laju pertumbuhan mulai menurun dengan makin bertambahnya nilai X. Bilangan atau nilai k, a dan b dapat dicari dengan cara trend yang diubah.

Bentuk kurvanya sebagai berikut.



Gambar 4.11.

Kurva Fungsi : Y = $\frac{k}{10^{a+bX}+1}$

Contoh 1.

Fungsi 1 :

$$Y = \frac{k}{10^{a+bX}+1}$$

Atau fungsi 2 :

$$Y = \frac{1}{e^{a+bX}+\frac{1}{k}}$$

Besarnya nilai k mendekati Y maksimum dari data pengamatan. Setelah diketahui nilai $\frac{1}{k}$.

Keterangan :

$$y = \ln\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{k}\right) \text{ dan } x = X.$$

Maka persamaan berubah bentuk menjadi persamaan linier sederhana:

$$y = a + bx$$

Tabel 4.33.
Struktur Data Transformasi Variabel Y ke Ln

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	X_1	Y_1	x_1=X_1	$y_1=\ln(\frac{1}{Y_1}-\frac{1}{k})$
2	X_2	Y_2	x_2=X_2	$y_2=\ln(\frac{1}{Y_2}-\frac{1}{k})$
3	X_3	Y_3	x_3=X_3	$y_3=\ln(\frac{1}{Y_3}-\frac{1}{k})$
4	X_4	Y_4	x_4=X_4	$y_4=\ln(\frac{1}{Y_4}-\frac{1}{k})$
5	X_5	Y_5	x_5=X_5	$y_5=\ln(\frac{1}{Y_5}-\frac{1}{k})$
6	X_6	Y_6	x_6=X_6	$y_6=\ln(\frac{1}{Y_6}-\frac{1}{k})$
N	X_n	Y_n	x_n=X_n	$y_n=\ln(\frac{1}{Y_n}-\frac{1}{k})$

Tabel 4.34.
Data Variabel X dan k dalam Logaritma Natural (ln)

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1	y_1^2
2	x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2	y_2^2
3	x_3	y_3	x_3^2	x_3y_3	y_3^2
4	x_4	y_4	x_4^2	x_4y_4	y_4^2
5	x_5	y_5	x_5^2	x_5y_5	y_5^2
6	x_6	y_6	x_6^2	x_6y_6	y_6^2
N	x_n	y_n	x_n^2	x_ny_n	y_n^2
Jumlah	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_iy_i	Σy_i^2

Contoh :

Suatu penelitian hubungan umur tanaman (X) dalam satuan hari setelah tanam (HST) dan tinggi tanaman cabai (Y) dalam satuan cm dalam jarak tanam yang berbeda. Adapun data hasil pengamatan pada Tabel 4.35 berikut.

Tabel 4.35.
Hubungan Umur Tanaman (Hari) dan Tinggi Tanaman (Cm) pada Tiga Jarak Tanam yang Berbeda

Umur tan. (tahun)	Tinggi tanaman (cm)		
	30 x 50 cm	50 x 50 cm	70 x 50 cm
0	1	1	1
21	5	6	6
42	17	20	23
63	27	30	35
84	29	34	37
105	30	35	38

Persamaan fungsi eksponensial diselesaikan per varietas tanaman, dalam hal ini terdapat tiga jarak tanam :

1. Jarak tanam 30 x 50 cm

Pada jarak tanam 30 x 50 cm, diketahui tinggi tanaman cabai maksimum sebesar 30 cm ditambahkan 0,01, maka :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{30{,}01}$$

Tabel 4.36.
Perubahan Data Tinggi Tanaman (Y) dan k ke dalam Logaritma Natural (ln) dan $x_i = X_i$

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	0	1	0	$\ln(\frac{1}{1} - \frac{1}{30,01}) = -0,0339$
2	21	5	21	$\ln(\frac{1}{5} - \frac{1}{30,01}) = -1,7917$
3	42	17	42	$\ln(\frac{1}{17} - \frac{1}{30,01}) = -3,6690$
4	63	27	63	$\ln(\frac{1}{27} - \frac{1}{30,01}) = -5,5954$
5	84	29	84	$\ln(\frac{1}{29} - \frac{1}{30,01}) = -6,7589$
6	105	30	105	$\ln(\frac{1}{30} - \frac{1}{30,01}) = -11,4079$

Tabel 4.37.
Data Tinggi Tanaman (Y) dan k dalam ln

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	-0,0339	0	0	0,0011
2	21	-1,7917	441	-37,626	3,2102
3	42	-3,6690	1.764	-154,099	13,4617
4	63	-5,5954	3.969	-352,512	31,3088
5	84	-6,7589	7.056	-567,746	45,6824
6	105	-11,4079	11.025	-1.197,829	130,1401
Jumlah	315	-29,2568	24.255	-2.309,811	223,8044

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \text{x}{-2.309{,}811}) - (315\ \text{x}{-29{,}2568})}{(6\ \text{x}\ 24.255) - (315)^2}$$

= -0,10027

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{-29{,}2568}{6} - \frac{-0{,}10027\ \text{x}\ 315}{6}$$

= 0,38801

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi logistik pada pada jarak tanam 30 x 50 cm yaitu:

$$Y = \frac{1}{e^{0{,}38801\ -0{,}10027X} + \frac{1}{30{,}01}}$$

2. Jarak tanam 50 x 50 cm

Pada jarak tanam 50 x 50 cm, diketahui tinggi tanaman cabai maksimum sebesar 35 cm ditambahkan 0,01, maka :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{35{,}01}$$

Tabel 38.
Perubahan Data Tinggi Tanaman (Y) ke dalam Logaritma Natural (ln) dan x_i = X_i

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	0	1	0	$\ln(\frac{1}{1}-\frac{1}{35{,}01})$ = -0,0290
2	21	6	21	$\ln(\frac{1}{6}-\frac{1}{35{,}01})$ = -1,9798
3	42	20	42	$\ln(\frac{1}{20}-\frac{1}{35{,}01})$ = -3,8426
4	63	30	63	$\ln(\frac{1}{30}-\frac{1}{35{,}01})$ = -5,3454
5	84	34	84	$\ln(\frac{1}{34}-\frac{1}{35{,}01})$ = -7,0720
6	105	35	105	$\ln(\frac{1}{35}-\frac{1}{35{,}01})$ = -11,7162

Tabel 4.39.
Data Tinggi Tanaman (Y) dalam ln

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	0	-0,0290	0	0	0,0008
2	21	-1,9798	441	-41,575	3,9194
3	42	-3,8426	1.764	-161,391	14,7660
4	63	-5,3454	3.969	-336,760	28,5732
5	84	-7,0720	7.056	-594,052	50,0138
6	105	-11,7162	11.025	-1.230,196	137,2682
Jumlah	315	-29,9850	24.255	-2.363,974	234,5415

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy-(\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2)-(\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6 \ x - 2.363{,}974) - (315 \ x - 29{,}9850)}{(6 \ x \ 24.255) - (315)^2}$$

$$= -0{,}10233$$

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b \ \Sigma x}{n}$$

$$= \frac{-29{,}9850}{6} - \frac{-0{,}10233 \ x \ 315}{6}$$

$$= 0{,}37504$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi logistik pada jarak tanam 50 x 50 cm yaitu :

$$Y = \frac{1}{e^{0{,}37504 - 0{,}10233 \ X} + \frac{1}{35{,}01}}$$

3. Jarak tanam 70 x 50 cm

Pada jarak tanam 70 x 50 cm, diketahui tinggi tanaman cabai maksimum sebesar 38 cm ditambahkan 0,01, maka :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{38{,}01}$$

Tabel 4.40.
Perubahan Data Tinggi Tanaman (Y) ke dalam Logaritma Natural (ln) dan $x_i = X_i$

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	0	1	0	$\ln(\frac{1}{1} - \frac{1}{38,01}) = -0,0267$
2	21	6	21	$\ln(\frac{1}{6} - \frac{1}{38,01}) = -1,9636$
3	42	23	42	$\ln(\frac{1}{23} - \frac{1}{38,01}) = -4,0646$
4	63	35	63	$\ln(\frac{1}{35} - \frac{1}{38,01}) = -6,0913$
5	84	37	84	$\ln(\frac{1}{37} - \frac{1}{38,01}) = -7,2388$
6	105	38	105	$\ln(\frac{1}{38} - \frac{1}{38,01}) = -11,8806$

Tabel 4.41.
Data Tinggi Tanaman (Y) dalam ln

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	0	-0,0267	0	0,000	0,0007
2	21	-1,9636	441	-41,235	3,8556
3	42	-4,0646	1.764	-170,714	16,5212
4	63	-6,0913	3.969	-383,749	37,1034
5	84	-7,2388	7.056	-608,061	52,4005
6	105	-11,8806	11.025	-1.247,464	141,1488
Jumlah	315	-31,2655	24.255	-2.451,223	251,0301

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(6\ \text{x} -2.451,233) - (315\ \text{x} -31,2655)}{(6\ \text{x}\ 24.255) - (315)^2}$$

$= -0{,}10493$

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{-31{,}2655}{6} - \frac{-0{,}10493 \text{ x } 315}{6}$$

$= 0{,}29780$

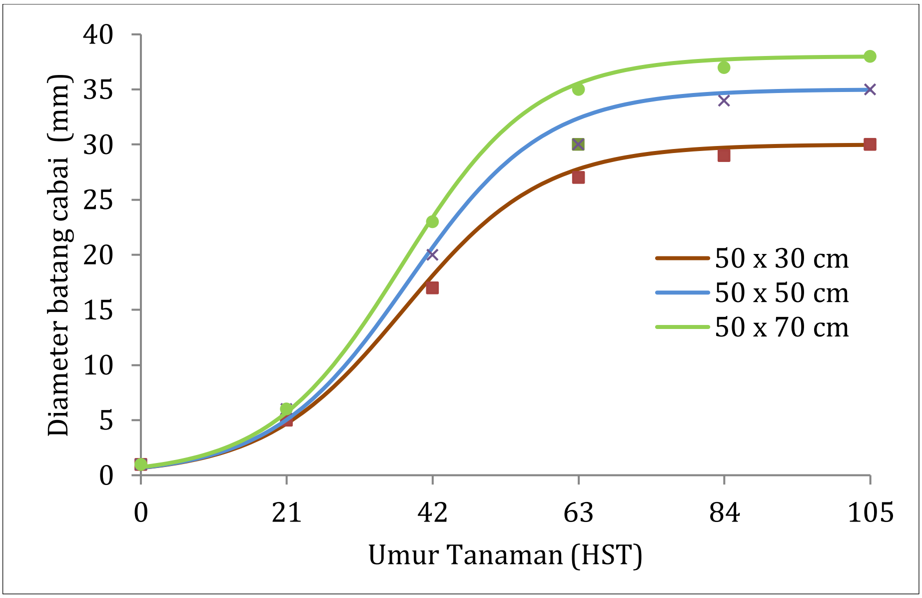
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi logisti pada jarak tanam 70 x 50 cm, yaitu :

$$Y = \frac{1}{e^{0{,}29780 - 0{,}10493\,X} + \frac{1}{38{,}01}}$$

Atas dasar analisis pada ketiga jarak tanam tersebut, maka didapatkan tiga persamaan fungsi logistik berikut :

1. 30 x 50 cm : $Y = \dfrac{1}{e^{0{,}38801 - 0{,}10027X} + \frac{1}{30{,}01}}$
2. 50 x 50 cm : $Y = \dfrac{1}{e^{0{,}37504 - 0{,}10233\,X} + \frac{1}{35{,}01}}$
3. 70 x 50 cm : $Y = \dfrac{1}{e^{0{,}29780 - 0{,}10493\,X} + \frac{1}{38{,}01}}$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva logistik seperti pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12.
Pengaruh Umur Tanaman terhadap Diameter Batang dengan Trend Logistik

4.2.5. Model Eksponensial : $Y = k + ab^X$

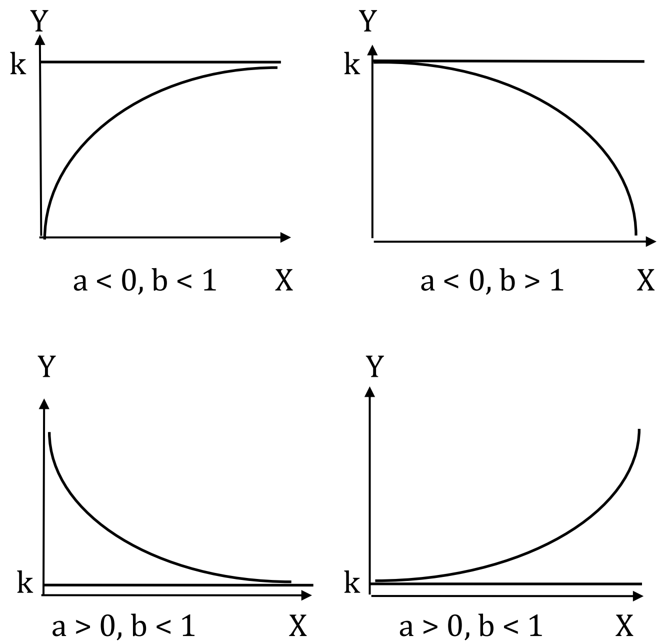
Bentuk trend eksponensial : $Y = ab^X$ dapat dikonversi atau diubah dengan jalan menambah bilangan konstan k menjadi trend Gompertz :

$$Y = k + ab^X$$

Trend ini biasanya digunakan untuk meramalkan jumlah penduduk pada usia tertentu. Nilai k, a dan b = konstan. Kalau diubah menjadi log, maka menjadi bentuk :

$$\text{Log } Y = \log k + (\log a)\, b^X$$

Nilai k merupakan nilai asymtote, selalu didekati, akan tetapi tidak pernah dicapai. Nilai k, a dan b dapat dicari seperti perrhitungan pada *trend logistic*. Tergantung nilai a dan b, maka bentuk kurva $Y = k + ab^X$ dapat berubah-ubah seperti Gambar 4.13 berikut.



Gambar 4.13.
Kurva Fungsi : $Y = k + ab^X$

Apabila a > 0, b > 1, maka bentuk kurvanya seperti contoh di atas. Oleh karena itu bentuk trend (regresi) eksponensial yang diubah tidak dapat dijadikan bentuk linier dengan jalan transformasi. Maka untuk memperkirakan atau menghitung nilai koefisien a dan b tidak dapat digunakan metode kuadrat terkecil (*least square method*). Jadi harus digunakan cara lain.

4.2.6. Model Eksponensial : $Y = ae^{bX}$

Bila besarnya X tidak dapat bersifat positif atau negatif, akan terdapat fungsi eksponensial :

$$Y = ae^{bX}$$

Dimana :

a dan b adalah parameter yang akan diduga dan e = bilangan logaritma natural (2.718282).

Supaya persamaan menjadi linier sederhana, maka :

$$\ln Y = \ln a + bX.$$

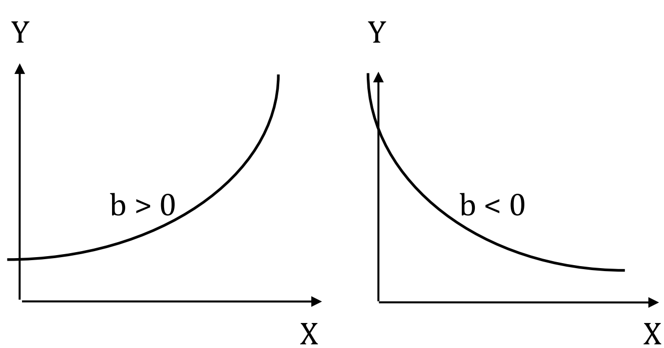
Dimisalkan :

$$y = \ln Y,\ a' = \ln a,\ \text{dan}\ x = X$$

Maka :

$$y = a' + bx.$$

Untuk mendapatkan nilai a, maka : a = anti ln a'. Bentuk grafik dari fungsi b positif dan negatif dapat dilihat pada Gambar 4.14.



Gambar 4.14.
Kurva Fungsi : $Y = ae^{bX}$

Beberapa model yang dapat digolongkan dalam fungsi eksponensial ini antara lain :

Model pertama : *population growth model*

$$Nt = No\ e^{rt}$$

Keterangan :

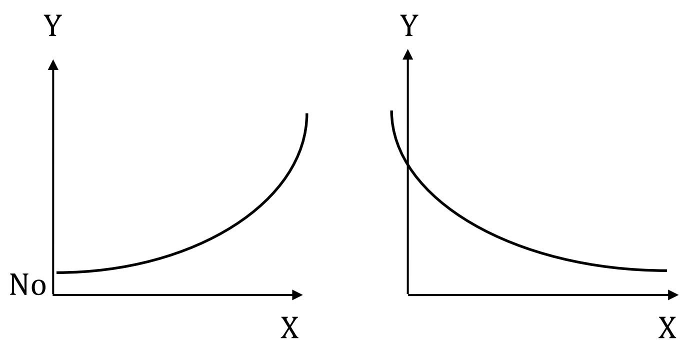
Nt = Besarnya populasi pada saat t
No = Besarnya populasi awal
r = Kecepatan pertumbuhan per tahun
t = Waktu (tahun)

Model kedua : Kurva logistik

Sering disebut "*general type of population growth model*"yang bentuk fungsinya :

$$Y = \frac{1}{a_0 + a_1\ e^{-bX}}\ \text{, untuk } (-\sim < X < \sim)$$

Model pertama biasanya digunakan untuk pertumbuhan penduduk untuk daerah kurang maju, sedangkan model kedua untuk estimasi jumlah penduduk daerah maju. Bentuk grafiknya pada Gambar 4.15 sebagai berikut.



Gambar 4.15

Fungsi : Nt = No e^{rt} dan Y = $\frac{1}{a_0 + a_1\ e^{-bX}}$

Pendugaan parameter a dan b untuk model umum : $Y = ae^{bX}$ dilakukan dengan mentranformasikan model tersebut ke bentuk liniernya melalui logaritma.

$$Y = ae^{bX}$$

Menjadi :

$$\ln Y = \ln a + bX$$

Keterangan :

$$y = \ln Y, \text{ dan } a' = \ln a$$

Atau :

$$y = a' + bX,$$

Analisisnya seperti analisis regresi linier sederhana.

Model ketiga : "*logaritmic reciprocal tranformation*"

Apabila bentuk fungsi eksponensialnya :

$$Y = e^{a - \frac{b}{X}}$$

Maka dalam analisisnya fungsi di atas dapat diubah menjadi :

$$\ln Y = a - \frac{b}{X}$$

Untuk X = 0, nilai Y tidak dapat dicari besarnya. Namun demikian terlihat jelas bahwa untuk X mendekati 0, Y juga mendekati 0, sehingga titik (0 ; 0) dapat dianggap sebagai titik awal dari fungsi ini.

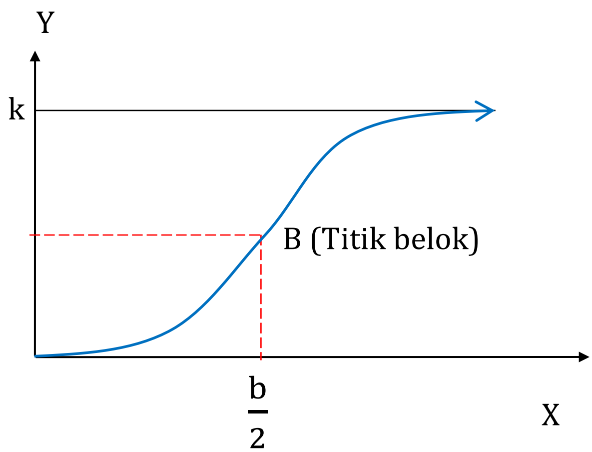
$$\frac{d_y}{d_x} = e^{a - \frac{b}{X}} \left[\frac{-b}{X^2}\right],$$

Sudut kemiringan dari fungsi ini akan bersifat positif untuk harga X yang positif.

Keterangan :

$$\frac{d_y^2}{d_x^2} = e^{a-\frac{b}{X}}\left[\frac{-b^2}{X^4} - \frac{-2b}{X^3}\right].$$

Terlihat di sini bahwa terdapat titik infleksi (*inflection point*) pada X = $\frac{b}{2}$. Disebelah kiri sebelum titik B, laju pertumbuhan terjadi dengan cepat sekali dengan bertambahnya nilai X. Setelah melewati titik B, laju pertumbuhan mulai menurun dengan makin bertambahnya nilai X. Untuk X → ~ maka Y > e^a sehingga grafik fungsinya dapat dilihat pada Gambar 4.16 berikut.



Gambar 4.16.

Fungsi : ln Y = a - $\frac{b}{x}$

4.3. Trend Sigmoid

Trend sigmoid yang dipilih untuk mewakili data pengamatan dengan model berikut.

4.3.1. Fungsi $Y = e^{a+bX}$

Struktur data untuk menyelesaikan perhitungan dari fungsi sigmoid :

$$Y = e^{a+bX}$$

Jika variabel X selalu positif, maka fungsi tersebut diubah menjadi bentuk aditifnya melalui tranformasi logaritma menjadi :

$$\text{Ln } Y = a + bX$$

Keterangan :

$$y = \ln Y, \text{ dan } x = X$$

Maka persamaan berubah menjadi persamaan linier sederhana: $y = a + bx$.

Tabel 4.42.
Struktur Data Tranformasi Variabel Y ke Logaritma Natural (ln)

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	X_1	Y_1	X_1	$\ln(Y_1)$
2	X_2	Y_2	X_2	$\ln(Y_2)$
3	X_3	Y_3	X_3	$\ln(Y_3)$
4	X_4	Y_4	X_4	$\ln(Y_4)$
5	X_5	Y_5	X_5	$\ln(Y_5)$
N	X_n	Y_n	X_n	$\ln(Y_n)$

Lanjutan Tabel 4.42.

No.	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1	y_1^2
2	x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2	y_2^2
3	x_3	y_3	x_3^2	x_3y_3	y_3^2
4	x_4	y_4	x_4^2	x_4y_4	y_4^2
5	x_5	y_5	x_5^2	x_5y_5	y_5^2
N	x_n	y_n	x_n^2	x_ny_n	y_n^2
Jumlah	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σx_iy_i	Σy_i^2

Contoh 1.

Suatu penelitian untuk mengetahui pengaruh umur tanaman (X) dalam satuan tahun setelah tanam (TST) terhadap lingkar batang karet (Y) dalam satuan (cm) pada tiga jarak tanam. Adapun data hasil pengamatan berikut.

Tabel 4.43.
Hubungan Umur Tanaman (TST) dan Lingkar Batang (cm) pada Tiga Jarak Tanam

Umur (TST)	Diameter batang (cm)		
	3 x 3 m	3 x 4 m	3 x 5 m
1	0,6	0,6	0,6
2	2,5	3,1	2,5
3	4,6	6,6	6,8
4	10,1	14,8	19,4
5	22,4	50,7	70,8

Persamaan fungsi sigmoid diselesaikan per jarak tanam, dalam hal ini ada tiga jarak tanam :

1. Jarak tanam 3 x 3 m

Tabel 4.44.
Perubahan Data Lingkar Batang (Y) ke dalam Logaritma Natural (ln)

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	1	0,6	1	-0,51080
2	2	2,5	2	0,91629
3	3	4,6	3	1,52606
4	4	10,1	4	2,31254
5	5	22,4	5	3,10906

Lanjutan Tabel 4.44.

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1	-0,51080	1	-0,5108	0,260942
2	2	0,91629	4	1,83258	0,839588
3	3	1,52606	9	4,57817	2,328847
4	4	2,31254	16	9,25014	5,347820
5	5	3,10906	25	15,5453	9,666260
Jumlah	15	7,35312	55	30,6954	18,443459

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(5\ \text{x}\ 30{,}6954) - (15\ \text{x}\ 7{,}35312)}{(5\ \text{x}\ 55) - (15)^2}$$

$= 0{,}8636$

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{7{,}35312}{5} - \frac{0{,}8636 \times 15}{5}$$

$= -1{,}12018$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada jarak tanam 3 x 3 m, yaitu :

$$Y = e^{-1{,}12018 + 0{,}8636\,X}$$

2. Jarak tanam 3 x 4 m

Tabel 4.45.
Perubahan Data Lingkar Batang (Y) ke dalam Logaritma Natural (ln)

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	1	0,6	1	-0,51080
2	2	3,1	2	1,13140
3	3	6,6	3	1,88707
4	4	14,8	4	2,69463
5	5	50,7	5	3,92593

Lanjutan Tabel 4.45.

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1	-0,51080	1	-0,51083	0,26094
2	2	1,13140	4	2,26280	1,28007
3	3	1,88707	9	5,66120	3,56103
4	4	2,69463	16	10,77851	7,26102
5	5	3,92593	25	19,6296	15,4129
Jumlah	15	9,12820	55	37,8213	27,7760

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\,\Sigma xy - (\Sigma x\,\Sigma y)}{(n\,\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(5\ \text{x}\ 37{,}8213) - (15\ \text{x}\ 9{,}1282)}{(5\ \text{x}\ 55) - (15)^2}$$

$$= 1{,}0436$$

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{9{,}1282}{5} - \frac{0{,}10436\ \text{x}\ 15}{5}$$

$$= -1{,}30538$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada jarak tanam 3 x 4 m, yaitu :

$$Y = e^{-1{,}30538\ +\ 1{,}0436\ X}$$

3. Jarak tanam 3 x 5 m

Tabel 4.46.
Perubahan Data Lingkar Batang (Y) ke dalam Logaritma Normal (ln)

No.	X_i	Y_i	x_i	y_i
1	1	0,6	1	-0,51080
2	2	3,1	2	0,91629
3	3	6,6	3	1,91692
4	4	14,8	4	2,96527
5	5	50,7	5	4,25986

Lanjutan Tabel 4.46.

No.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1	-0,51080	1	-0,51083	0,26094
2	2	0,91629	4	1,83258	0,83959
3	3	1,91692	9	5,75076	3,67459
4	4	2,96527	16	11,86109	8,79284
5	5	4,25986	25	21,29930	18,14640
Jumlah	15	9,54752	55	40,23291	31,71437

Koefisien regresi b :

$$b = \frac{n\ \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y)}{(n\ \Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{(5\ \text{x}\ 40{,}23291) - (15\ \text{x}\ 9{,}54752)}{(5\ \text{x}\ 55) - (15)^2}$$

$$= 1{,}1590$$

Konstanta a :

$$a = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{b\,\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{9{,}54752}{5} - \frac{1{,}1590 \times 15}{5}$$

$$= -1{,}5676$$

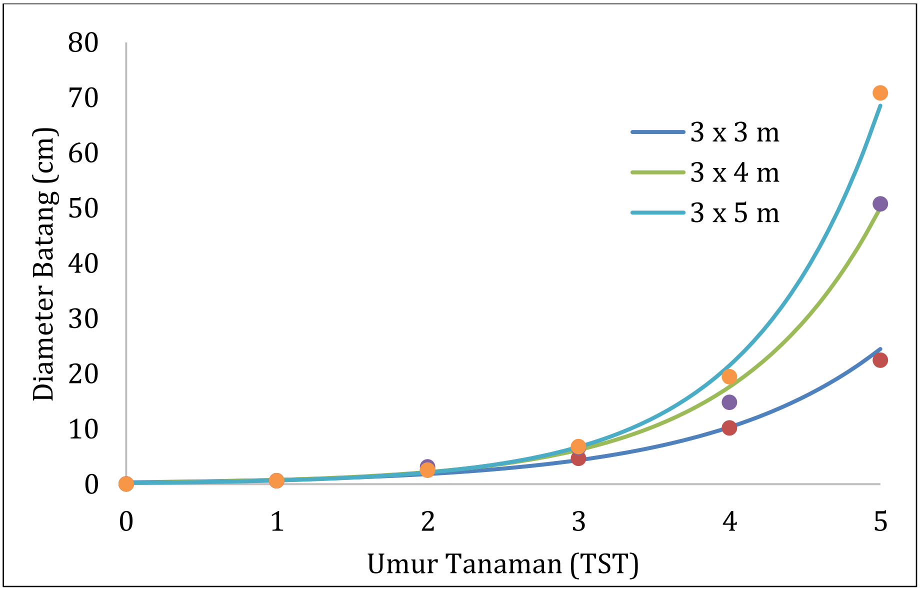
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada jarak tanam 3 x 5 m, yaitu :

$$Y = e^{-1{,}5676 + 1{,}1590\,X}$$

Atas dasar analisis dari ketiga jarak tanam tersebut, maka didapatkan tiga persamaan fungsi sigmoid sebagai berikut :

1. Jarak tanam 3 x 3 m : $Y = e^{-1{,}12018 + 0{,}8636\,X}$
2. Jarak tanam 3 x 4 m : $Y = e^{-1{,}30538 + 1{,}0436\,X}$
3. Jarak tanam 3 x 5 m : $Y = e^{-1{,}56760 + 1{,}1590\,X}$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, maka dapat dibuat kurva sigmoid seperti pada Gambar 4.17 berikut.



Gambar 4.17.
Hubungan Umur Tanaman dan Diameter Batang (Cm)

4.3.2. Fungsi $Y = e^{a + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2}}$

Model fungsi :

$$Y = e^{a + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2}}$$

Disederhanakan menjadi persamaan :

$$\text{Ln } Y = a + \frac{b_1}{X} + \frac{b_2}{X^2}.$$

Untuk dapat menyelesaikan fungsi tersebut, maka variabel perlu ditransformasikan menjadi:

$$x_1 = \frac{1}{X};\ x_2 = \frac{1}{X^2};\ \text{dan } y = \ln Y.$$

Maka persamaan akan berubah menjadi persamaan regresi linier sederhana : $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$.

Tabel 4.47.
Struktur Data Tranformasi Variabel X dan Y

No.	X_i	Y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	X_1	Y_1	$x_{11} = \frac{1}{X_1}$	$x_{21} = \frac{1}{X_1^2}$	$y_1 = \ln Y_1$
2	X_2	Y_2	$x_{12} = \frac{1}{X_2}$	$x_{22} = \frac{1}{X_2^2}$	$y_2 = \ln Y_2$
3	X_3	Y_3	$x_{13} = \frac{1}{X_3}$	$x_{23} = \frac{1}{X_3^2}$	$y_3 = \ln Y_3$
4	X_4	Y_4	$x_{14} = \frac{1}{4}$	$x_{24} = \frac{1}{X_4^2}$	$y_4 = \ln Y_4$
5	X_5	Y_5	$x_{15} = \frac{1}{X_5}$	$x_{25} = \frac{1}{X_5^2}$	$y_5 = \ln Y_5$
N	X_n	Y_n	$x_{1n} = \frac{1}{X_n}$	$x_{2n} = \frac{1}{X_n^2}$	$y_n = \ln Y_n$
Jumlah			Σx_{1i}	Σx_{2i}	Σy_i

Lanjutan Tabel 4.47.

No.	x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	y_i^2
1	x_{11}^2	$x_{11}x_{21}$	$x_{11}y_1$	x_{21}^2	$x_{21}y_1$	y_1^2
2	x_{12}^2	$x_{12}x_{22}$	$x_{12}y_2$	x_{22}^2	$x_{22}y_2$	y_2^2
3	x_{13}^2	$x_{13}x_{23}$	$x_{13}y_3$	x_{23}^2	$x_{23}y_3$	y_3^2
4	x_{14}^2	$x_{14}x_{24}$	$x_{14}y_4$	x_{24}^2	$x_{24}y_4$	y_4^2
5	x_{15}^2	$x_{15}x_{25}$	$x_{15}y_5$	x_{25}^2	$x_{25}y_5$	y_5^2
N	x_{1n}^2	$x_{1n}x_{26}$	$x_{1n}y_n$	x_{2n}^2	$x_{2n}y_n$	y_n^2
Jumlah	Σx_{1i}^2	$\Sigma x_{1i}x_{2i}$	$\Sigma x_{1i}y_i$	Σx_{2i}^2	$\Sigma x_{2i}y_i$	Σy_i^2

Contoh 1.

Penelitian tentang pengaruh jenis pupuk kandang terhadap tinggi batang tanaman cabai yang diamati dari saat tanam benih hingga umur 70 hari setelah tanam (HST).

Tabel 4.48.
Hubungan Umur Tanaman (HST) dan Tinggi Batang Cabai (cm) pada Tiga Jenis Pupuk Kandang

Umur (HST)	Diameter batang (cm)		
	Ayam	Kambing	Kontrol
0,001	0,001	0,001	0,001
14	25	26	25
28	33	35	32
42	38	40	35
56	40	44	37
70	41	45	37

Persamaan fungsi sigmoid diselesaikan per jenis pupuk kandang, dalam hal ini ada dua pupuk kandang dan satu kontrol.

1. Pupuk kandang ayam

Tabel 4.49.
Data Hubungan Umur Tanaman (X) dan Tinggi Batang Cabai (Y)

No.	X_i	Y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0,001	0,001	1000	1000000	-6,90780
2	14	25	0,07143	0,00510	3,21888
3	28	33	0,03571	0,00128	3,49651
4	42	38	0,02381	0,00057	3,63759
5	56	40	0,01786	0,00032	3,68888
6	70	41	0,01429	0,00020	3,71357
Jumlah			1000,16	1000000	10,8477

Lanjutan Tabel 4.50.

x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	y_i^2
1000000	1E+09	-6907,8	1E+12	-6907755,3	47,7171
0,0051	0,0003644	0,22992	2,603E-05	0,0164228	10,3612
0,00128	4,555E-05	0,12488	1,627E-06	0,0044598	12,2256
0,00057	1,35E-05	0,08661	3,214E-07	0,0020621	13,2320
0,00032	5,694E-06	0,06587	1,017E-07	0,0011763	13,6078
0,00020	2,915E-06	0,05305	4,165E-08	0,0007578	13,7906
1000000	1E+09	-6907,2	1E+12	-6907755,3	110,934

Untuk mengetahui nilai a, b_1 dan b_2 digunakan metode abbreviate Doolittle sebagai berikut.

Tabel 4.51.
Metode Abbreviate Doolittle Dipersingkat

	Kolom I X'X bo	b$_1$	b$_2$	Kolom II X'Y
Baris	1	2	3	4
	$\sum n$	$\sum x_1$ $\sum x_1^2$	$\sum x_2$ $\sum x_1 x_2$ $\sum x_2^2$	$\sum y$ $\sum x_1 y$ $\sum x_2 y$
1 2 3	6	1000,16 1000000	1000000 1E+09 1E+12	10,8477 -6907,19 -6907755
4 5	6 1	1000,16 166,694	1000000 166666,7	10.8477 1,80794
6 7		833279 1	8,33E+08 1000,033	-8715,43 -0,01046
8 9			2147,155 1	18,8134 0,00876

Berdasarkan Tabel 4.56 di atas dapat diketahui nilai a, b_1 dan b_2, yaitu :

1. Koefisien regresi b_2 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 9.
   b_2 x 1 = 0,00876, maka b_2= 0,00876

2. Koefisien regresi b_1 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 7.
   (b_1 x 1) + (b_2 x 1000,033) = -0,01046,

$(b_1 \text{ x } 1) + (0{,}00876 \text{ x } 1000{,}033) = -0{,}01046,$
$b_1 = -0{,}0104 - (0{,}00876 \text{ x } 1000{,}033)$
$b_1 = -8{,}77276$

3. Konstanta a :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 1 ; 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 5.
   $(a \text{ x } 1) + (b_1 \text{ x } 166{,}694) + (b_2 \text{ x } 166666{,}7) = 1{,}80794$
   $(a \text{ x } 1) + (-8{,}77276 \text{ x } 166{,}694) + (0{,}00876 \text{ x } 166666{,}7)$
   $= 1{,}80794$
   $a = 1{,}80794 + 1462{,}36 - 1460{,}34$
   $= 3{,}83723$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada perlakuan pupuk kandang sapi, yaitu :

$$Y = e^{3{,}83723 + \frac{-8{,}77276}{x} + \frac{0.00876}{x^2}}$$

2. Pupuk kandang kambing

Tabel 4.52.
Data Hubungan Umur Tanaman (X) dan Tinggi Batang Cabai (Y)

No.	X_i	Y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0.001	0.001	1000	1000000	-6,90776
2	14	26	0,07143	0,00510	3,25810
3	28	35	0,03571	0,00128	3,55535
4	42	40	0,02381	0,00057	3,68888
5	56	44	0,01786	0,00032	3,78419
6	70	45	0,01429	0,00020	3,80666
Jumlah			1000,16	1000000	11,1854

Lanjutan Tabel 4.52.

x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	y_i^2
1000000	1E+09	-6907,76	1E+12	-6907755	47,7171
0,00510	0,000364	0,23272	2,603E-05	0,01662	10,6152
0,00128	4,56E-05	0,12698	1,627E-06	0,00453	12,6405
0,00057	1,35E-05	0,08783	3,214E-07	0,00209	13,6078
0,00032	5,69E-06	0,06757	1,017E-07	0,00121	14,3201
0,00020	2,92E-06	0,05438	4,165E-08	0,00078	14,4907
1000000	1E+09	-6907,19	1E+12	-6907755	113,391

Untuk mengetahui nilai b_0, b_1 dan b_2 digunakan metode abbreviate Doolittle sebagai berikut.

Tabel 4.53.
Metode Abbreviate Doolittle Dipersingkat

	Kolom I			Kolom II
	bo	X'X b_1	b_2	X'Y
Baris	1	2	3	4
	$\sum n$	$\sum x_1$ $\sum x_1^2$	$\sum x_2$ $\sum x_1 x_2$ $\sum x_2^2$	$\sum y$ $\sum x_1 y$ $\sum x_2 y$
1	6	1000.16	1000000	11.18542
2		1000000	1E+09	-6907.19
3			1E+12	-6907755
4	6	1000.16	1000000	11.18542
5	1	166.694	166666.7	1.86424
6		833279	8.33E+08	-8771.73
7		1	1000.033	-0.01053
8			2147.155	20.6744
9			1	0.00963

Berdasarkan Tabel 4.58 di atas dapat diketahui nilai a, b_1 dan b_2, yaitu :

1. Koefisien regresi b_2 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 9.
   b_2 x 1 = 0,00963, maka b_2= 0,00963

2. Koefisien regresi b_1 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 7.
   $(b_1 \text{ x } 1) + (b_2 \text{ x } 1000{,}033) = -0{,}01053,$
   $(b_1 \text{ x } 1) + (0{,}00963 \text{ x } 1000{,}033) = -0{,}01053,$
   $b_1 = -0{,}0104 - (0{,}00963 \text{ x } 1000{,}033)$
   $b_1 = -9{,}63958$

3. Konstanta a :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 1 ; 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 5.
   $(bo \text{ x } 1) + (b_1 \text{ x } 166{,}694) + (b_2 \text{ x } 166666{,}7) = 1{,}86424$
   $(bo \text{ x } 1)+(-7{,}06723 \text{ x } 166{,}694)+(0{,}00706 \text{ x } 166666{,}7)$
   $= 1{,}86424$
   $bo = 1{,}86424 + 1606{,}86 - 1604{,}79$
   $= 3{,}9330$

Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada perlakuan pupuk kandang sapi, yaitu :

$$Y = e^{3{,}9330 + \frac{-9{,}63958}{X} + \frac{0.00963}{X^2}}$$

4. Kontrol

Tabel 4.54.
Data Hubungan Umur Tanaman (X) dan Tinggi Batang Cabai (Y)

No.	X_i	Y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	0.001	0.001	1000	1000000	-6,90776
2	14	25	0,07143	0,00510	3,21888
3	28	33	0,03571	0,00128	3,46574
4	42	38	0,02381	0,00057	3,55535
5	56	40	0,01786	0,00032	3,61092
6	70	41	0,01429	0,00020	3,61092
Jumlah			1000,16	1000000	10,5540

Lanjutan Tabel 4.54.

x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	y_i^2
1000000	1E+09	-6907,76	1E+12	-6907755	47,7171
0,00510	0,0003644	0,22992	2,603E-05	0,01642	10,3612
0,00128	4,555E-05	0,12378	1,627E-06	0,00442	12,0113
0,00057	1,35E-05	0,08465	3,214E-07	0,00202	12,6405
0,00032	5,694E-06	0,06448	1,017E-07	0,00115	13,0387
0,00020	2,915E-06	0,05158	4,165E-08	0,00074	13,0387
1000000	1E+09	-6907,2	1E+12	-6907755	108,808

Untuk mengetahui nilai a, b_1 dan b_2 digunakan metode abbreviate Doolittle sebagai berikut.

Tabel 4.55.
Metode Abbreviate Doolittle Dipersingkat

	Kolom I X'X			Kolom II X'Y
	bo	b_1	b_2	
Baris	1	2	3	4
	$\sum n$	$\sum x_1$ $\sum x_1^2$	$\sum x_2$ $\sum x_1x_2$ $\sum x_2^2$	$\sum y$ $\sum x_1y$ $\sum x_2y$
1 2 3	6	1000,16 1000000	1000000 1E+09 1E+12	10,554 -6907,2 -6907755
4 5	6 1	1000,16 166,694	1000000 166666,7	10,554 1,75901
6 7		833279 1	8,33E+08 1000,033	-8666,49 -0,0104
8 9			2147,155 1	15,1516 0,00706

Berdasarkan Tabel 4.60 di atas dapat diketahui nilai a, b_1 dan b_2, yaitu :

1. Koefisien regresi b_2 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 9.
   b_2 x 1 = 0,00706, maka b_2= 0,00706

2. Koefisien regresi b_1 :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 7.
   (b_1 x 1) + (b_2 x 1000,033) = -0,0104,
   (b_1 x 1) + (0,00706 x 1000,033) = -0,0104,
   b_1= -0,0104 - (0,00706 x 1000,033)

b_1= -7,06723

3. Konstanta bo :
   Perhitungan diperoleh dari kolom 1 ; 2 ; 3 (I) dan kolom 4 (II) atau pada baris 5.

   (bo x 1) + (b_1 x 166,694) + (b_2 x 166666,7) = -0,0104,

   (bo x 1) + (-7,06723x 166,694) + (0,00706 x 166666,7)

   = 1,75901

   bo = 1,75901 + 1178,06 – 1176,1

   = 3,7228

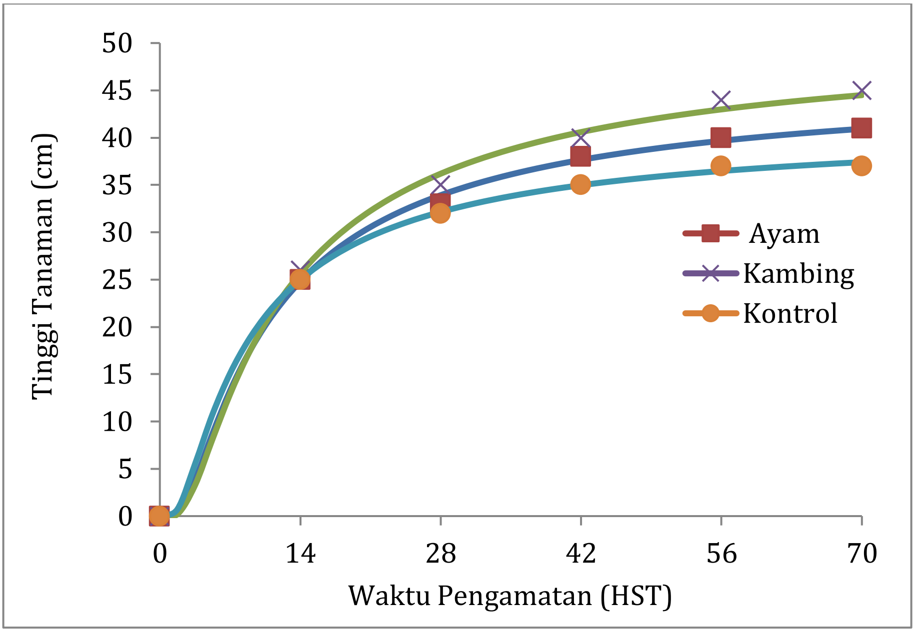
Berdasarkan perhitungan di atas maka didapatkan persamaan fungsi sigmoid pada kontrol, yaitu :

$$Y = e^{3,7228 + \frac{-7,06723}{x} + \frac{0,00706}{x^2}}$$

Berdasarkan perhitungan pada perlakuan jenis pupuk kandang, maka didapatkan tiga fungi sigmoid berikut.

1. Ayam : $Y = e^{3,8372 + \frac{-8,77276}{x} + \frac{0.00876}{x^2}}$
2. Kambing : $Y = e^{3,9330 + \frac{-9,63958}{x} + \frac{0.00963}{x^2}}$
3. Kontrol : $Y = e^{3,7228 + \frac{-7,06723}{x} + \frac{0,00706}{x^2}}$

Berdasarkan tiga fungsi tersebut, dapat dibuat kurva sigmoid pada Gambar 4.18 berikut.



Gambar 4.18.
Hubungan antar Umur Tanaman (HST) dan Tinggi Batang Cabai pada Perlakuan Jenis Pupuk Kandang

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 1986. Tabel statistik pertanian. Laboratorium Statistik Pertanian Departemen Agronomi, Fakultas Pertanian Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Gaspersz, V. 1991. Teknik analisis dalam penelitian percobaan. Jilid I. Tarsito. Bandung.

Gaspersz, V. 1992. Teknik analisis dalam penelitian percobaan. Jilid II. Tarsito. Bandung.

Gomez, K.A. and A.A. Gomez. 1984. Statistical procedures for agricultural research. A Wiley-intersclence Publication. John Wiley & Sons. New York.

Hadi, S. 1995. Analisis regresi. Andi Offset. Yogyakarta.

………... 2000. Statistik jilid I. Andi Offset. Yogyakarta.

………... 2000. Statistik jilid II. Andi Offset. Yogyakarta.

………... 2000. Statistik Jilid III. Andi Offset. Yogyakarta.

Prajitno, D. .?. Analisa regresi dan korelasi untuk penelitian pertanian. Liberty. Yogyakarta.

Soemartono. 1985. Rancangan percobaan 1. Fakultas Pertanian, Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Nilai batas nyata r dan R pada jenjang nyata 5% dan 1%.

Angka-angka dalam tabel menunjukkan nilai batas nyata koefisien korelasi pada taraf nyata α dengan DB error V_2 dan jumlah perubah bebas V_1

		V_1			
V_2	A	1	2	3	4
1	5%	,0997	,999	,999	,999
	1%	1,000	1,000	1,000	1,000
2	5%	,950	,975	,983	,987
	1%	,990	,995	,997	,998
3	5%	,878	,930	,950	,961
	1%	,959	,976	,983	,987
4	5%	,811	,881	,912	,930
	1%	,917	,949	,962	,970
5	5%	,754	,836	,874	,898
	1%	,874	,917	,937	,949
6	5%	,707	,795	,839	,867
	1%	,834	,886	,911	,927
7	5%	,666	,758	,807	,838
	1%	,798	,855	,885	,904
8	5%	,632	,726	,777	,811
	1%	,765	,827	,860	,882
9	5%	,602	,697	,750	,786
	1%	,735	,800	,836	,861
10	5%	,576	,671	,726	,763
	1%	,708	,776	,814	,840
11	5%	,553	,648	,703	,741
	1%	,684	,753	,793	,821
12	5%	,532	,627	,683	,722
	1%	,661	,732	,773	,802
13	5%	,514	,608	,664	,703
	1%	,641	,712	,755	,785
14	5%	,497	,590	,646	,686
	1%	,623	,694	,737	,768
15	5%	,482	,574	,630	,670
	1%	,606	,677	,721	,752
16	5%	,468	,559	,615	,655
	1%	,590	,662	,706	,738
17	5%	,456	,545	,601	,641
	1%	,575	,647	,691	,724
18	5%	,444	,532	,587	,628
	1%	,561	,633	,678	,710
19	5%	,433	,520	,575	,615
	1%	,549	,620	,665	,698
20	5%	,423	,509	,563	,604
	1%	,537	,608	,652	,685
21	5%	,413	,498	,522	,592
	1%	,526	,596	,641	,674
22	5%	,404	,488	,542	,582
	1%	,515	,585	,630	,663
23	5%	,396	,479	,532	,572
	1%	,505	,574	,619	,652

		V_1			
V_2	α	1	2	3	4
24	5%	,388	,470	,523	,562
	1%	,496	,565	,609	,642
25	5%	,381	,462	,514	,553
	1%	,487	,555	,600	,633
26	5%	,374	,454	,506	,545
	1%	,478	,546	,590	,624
27	5%	,367	,446	,498	,536
	1%	,470	,538	,582	,615
28	5%	,361	,439	,490	,529
	1%	,463	,530	,573	,606
29	5%	,355	,432	,482	,521
	1%	,456	,522	,565	,598
30	5%	,349	,426	,476	,514
	1%	,449	,514	,558	,591
35	5%	,325	,397	,445	,482
	1%	,418	,481	,523	,556
40	5%	,304	,373	,419	,455
	1%	,393	,454	,494	,526
45	5%	,288	,353	,397	,432
	1%	,372	,430	,470	,501
50	5%	,273	,336	,379	,412
	1%	,354	,410	,449	,479
60	5%	,250	,308	,348	,380
	1%	,325	,377	,414	,442
70	5%	,232	,286	,324	,354
	1%	,302	,351	,386	,413
80	5%	,217	,269	,304	,332
	1%	,283	,330	,362	,389
90	5%	,205	,254	,288	,315
	1%	,267	,312	,343	,368
100	5%	,195	,241	,274	,300
	1%	,254	,297	,327	,351
125	5%	,174	,216	,246	,269
	1%	,228	,266	,294	,316
150	5%	,159	,198	,225	,247
	1%	,208	,244	,270	,290
200	5%	,138	,172	,196	,215
	1%	,181	,212	,234	,253
300	5%	,113	,141	,160	,176
	1%	,148	,174	,192	,208
400	5%	,098	,122	,139	,153
	1%	,128	,151	,167	,180
500	5%	,088	,109	,124	,137
	1%	,115	,135	,150	,162
1000	5%	,062	,077	,088	,097
	1%	,081	,096	,106	,115

Lampiran 2. Distribusi t pada α% untuk uji 1 dan 2 ekor

Angka-angka dalam tabel menunjukkan luas atau probabilitas P [t > t (DB ; α)] = α dimana t berdistribusi t dengan derajat bebas DB.

Derajad Bebas (DB)	Jenjang nyata (α) untuk uji satu ekor												
	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Jenjang nyata (α) untuk uji dua ekor												
	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	.158	.325	.510	.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.129	.261	.398	.543	.706	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.711	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.126	.254	.387	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
≈	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Lampiran 3. Koefisien Orthogonal Polinomial untuk Interval Perlakuan Sama

Aras Perlakuan	Derajad Polinomial	Perlakuan						Jumlah kuadrat Koefisien
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	
3	Linier	-1	0	+1				2
	Kuadratik	+1	-2	+1				6
4	Linier	-3	-1	+1	+3			20
	Kuadratik	+1	-1	-1	+1			4
	Kubik	-1	+3	-3	+1			20
5	Linier	-2	-1	0	+1	+2		10
	Kuadratik	+2	-1	-2	-1	+2		14
	Kubik	-1	+2	0	-2	+1		10
	Kuartik	+1	-4	+6	-4	+1		70
6	Linier	-5	-3	-1	+1	+3	+5	70
	Kuadratik	+5	-1	-4	-4	-1	+5	84
	Kubik	-5	+7	+4	-4	-7	+5	180
	Kuartik	+1	-3	-2	+2	-3	+1	28
	Kuintik	-1	+5	+10	+10	-5	+1	252

Lampiran 4. Distribusi F pada α = 5% dan 1%

DBG	DBP 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1 5%	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	254	254	254	254
1%	4.052	4.999	5.403	5.625	5.764	5.859	5.928	5.981	6.022	5.056	6.082	6.106	6.142	6.169	6.208	6.234	6.258	6.286	6.302	6.323	6.334	6.352	6.361	6.366
2 5%	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19.47	19,48	19,49	19,49	19,50	19,50
1%	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,49	99,50	99,50
3 5%	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,87	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,58	8,87	8,56	8,54	8,54	8,53
1%	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,27	26,23	26,18	26,14	26,12
4 5%	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66	5,56	5,64	5,63
1%	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37	14,24	14,15	14,02	13,93	13,83	13,74	13,69	13,61	13,57	13,52	13,48	13,46
5 5%	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,59	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,40	4,38	4,37	4,36
1%	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89	9,99	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,07	9,04	9,02
6 5%	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67
1%	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,44	7,09	7,02	6,99	6,94	6,90	6,88
7 5%	5,59	4,47	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57	3,52	3,49	3.44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28	3,25	3,24	3,23
1%	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7.00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65
8 5%	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94	2,93
1%	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,11	5,06	5,00	4,96	4,91	4,88	4,48
9 5%	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
1%	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,00	4,92	4,80	4,73	4,64	4,56	4,51	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10 5%	4,84	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59	2,56	2,55	2,54
1%	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5.06	4,95	4,85	4,78	4,71	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11 5%	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45	2,42	2,41	2,40
1%	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,74	3,70	3,66	3,62	3,60
12 5%	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30
1%	9,33	6,93	5,59	5,42	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,49	3,46	3,41	3,38	3,36
13 5%	4,67	3,80	3.41	3,18	3,20	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,26	2,24	2,22	2,21
1%	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,85	3,78	3,67	3,59	3,51	3,42	3,37	3,30	3,27	3,21	3,28	3,16
14 5%	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
1%	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	4,94	3,85	3,80	3,70	3,62	3,51	3,42	3,34	3,26	3,21	3,14	3,11	3,06	3,02	3,00
15 5%	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48	2,43	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
1%	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,37	3,67	3,56	3,48	3,36	3,29	3,20	3,12	3,07	3,00	2,97	2,92	2,89	2,87
16 5%	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,37	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,13	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
1%	8,68	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55	3,45	3,37	3,25	3,18	3,10	3,01	2,96	2,89	2,86	2,80	2,77	2,75
17 5%	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
1%	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,86	2,79	2,76	2,70	2,67	2,65

DBP = Derajad Bebas Perlakuan, DBG = Derajad Bebas Galat

Lanjutan: Lampiran 4.

DBE	DBP																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	~
18 5%	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
1%	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,44	3,37	3,27	3,19	3,07	3,00	2,91	2,83	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19 5%	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	2,00	1,96	1,94	1,91	1,90	1,88
1%	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,70	2,63	2,60	2,54	2,51	2,49
20 5%	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,92	1,90	1,87	1,85	1,84
1%	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23	3,13	3,05	2,94	2,86	2,77	2,69	2,63	2,56	2,53	2,47	2,44	2,42
21 5%	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84	1,82	1,81
1%	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,63	2,58	2,51	2,47	2,42	2,38	2,36
22 5%	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26	2,23	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81	1,80	1,78
1%	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,37	2,33	2,31
23 5%	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,24	2,20	2,14	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
1%	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,53	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24 5%	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,76	1,74	1,73
1%	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
25 5%	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,77	1,74	1,72	1,71
1%	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,21	3,13	3,05	2,99	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26 5%	4,22	3,37	2,98	2,74	2,49	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,10	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,72	1,70	1,69
1%	7,72	5,53	4,46	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02	2,96	2,86	2,77	2,66	2,58	2,50	2,41	2,36	2,28	2,25	2,19	2,15	2,13
27 5%	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16	2,13	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,80	1,76	1,74	1,71	1,68	1,67
1%	7,68	5,49	4,60	4,11	3,79	3,56	3,39	3,26	3,14	3,06	2,98	2,93	2,83	2,74	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,25	2,21	2,16	2,12	2,10
28 5%	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,67	1,65
1%	7,64	5,45	4,57	4.07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11	3,03	2,95	2,90	2,80	2,71	2,60	2,52	2,44	2,35	2,80	2,22	2,18	2,13	2,09	2,06
29 5%	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,77	1,73	1,71	1,68	1,65	1,64
1%	7,60	5,42	4,54	4.04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,08	3,00	2,92	2,87	2,77	2,68	2,57	2,49	2,41	2,32	2,27	2,19	2,15	2,10	2,06	2,03
30 5%	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62
1%	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,90	2,84	2,74	2,66	2,55	2,47	2,38	2,29	2,24	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01
32 5%	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10	2,07	2,02	1,97	1,91	1,86	1,82	1,76	1,74	1,69	1,67	1,64	1,61	1,59
1%	7,50	5,34	4,46	3,97	3,66	3,42	3,25	3,12	3,01	2,94	2,86	2,80	2,70	2,62	2,51	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
34 5%	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,00	1,95	1,89	1,84	1,80	1,74	1,71	1,67	1,64	1,61	1,59	1,57
1%	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,38	3,21	3,08	2,97	2,89	2,82	2,76	2,66	2,58	2,47	2,38	2,30	2,21	2,15	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
36 5%	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,06	2,03	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,72	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
1%	7,39	5,25	4,38	3,89	3,58	3,35	3,18	3,04	2,94	2,86	2,78	2,72	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,17	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
38 5%	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,96	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,53
1%	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,91	2,82	2,75	2,69	2,59	2,51	2,40	2,32	2,22	2,14	2,03	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84

DBP = Derajad Bebas Perlakuan, DBG = Derajad Bebas Galat

Lanjutan: Lampiran 4.

	DBP																							
DBE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	~
40 5%	4,08	3,32	2,84	2,16	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
1%	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88	2,80	2,73	2,66	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81
42 5%	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,02	1,99	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,49
1%	7,27	5,15	4,29	3,80	3,49	3,26	3,10	2,96	2,86	2,77	2,70	2,64	2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78
44 5%	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52	1,50	1,48
1%	7,24	5,12	4,26	3,78	3,46	3,24	3,07	2,94	2,84	2,75	2,68	2,62	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,06	2,00	1,92	1,88	1,82	1,78	1,75
46 5%	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04	2,00	1,97	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46
1%	7,21	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,05	2,92	2,82	2,73	2,66	2,60	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,80	1,76	1,72
48 5%	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50	1,47	1,45
1%	7,19	5,08	4,22	3,74	3,42	3,20	3,04	2,90	2,80	2,71	2,64	2,58	2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78	1,72	1,70
50 5%	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
1%	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,62	2,56	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
55 5%	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00	1,97	1,93	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41
1%	7,12	5,01	4,14	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53	2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71	1,66	1,64
60 5%	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39
1%	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68	1,63	1,60
65 5%	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98	1,94	1,90	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
1%	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,79	2,70	2,61	2,54	2,47	2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64	1,60	1,56
70 5%	3,93	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35
1%	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,91	2,77	2,67	2,69	2,51	2,45	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,53
80 5%	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,91	1,88	1,82	1,77	1,70	1,63	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32
1%	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,41	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49
100 5%	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	3,03	1,97	1,92	1,88	1,85	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
1%	6,90	4,82	3,98	3,51	3,20	2,99	2,82	2,69	2,59	2,51	2,43	2,36	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43
150 5%	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
1%	6,81	4,75	3,91	3,44	3,14	2,92	2,76	2,62	2,53	2,44	2,37	2,30	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200 5%	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,80	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
1%	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,90	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,28	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
400 5%	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,61	1,13
1%	6,70	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,69	2,55	2,46	2,37	2,29	2,23	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1000 5%	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
1%	6,66	4,62	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,26	2,20	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
~ 5%	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,86	1,83	1,79	1,75	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00
1%	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,24	2,18	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

116

DBP = Derajad Bebas Perlakuan, DBG = Derajad Bebas Galat

Lampiran 5. Tabel distribusi X^2 pada jenjang nyata α

Angka-angka dalam tabel menunjukkan luas atau probabilitas P [$X^2 > X^2$ (DB ; α)] = α dimana X^2 berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas DB

Derajad bebas (DB)	Jenjang nyata (α)													
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	$.0^3157$	$.0^3628$	.00393	.0158	.0642	.148	455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.827
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.467
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	4.107	5.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.02	35.172	38.968	41.638	49.728
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703
32	16.362	17.783	20.072	22.271	25.148	27.373	31.336	35.665	38.466	42.585	46.194	50.487	53.486	62.487
34	17.789	19.275	21.664	23.952	26.938	29.242	33.336	37.795	40.676	44.903	48.602	52.995	56.061	63.247
36	19.233	20.783	23.269	25.643	28.735	31.115	35.336	39.922	42.879	47.212	50.999	55.489	58.619	67.985
38	20.691	22.304	24.884	27.343	30.537	32.992	37.335	42.045	45.076	49.513	53.384	57.969	61.162	70.703
40	22.164	23.838	26.509	29.051	32.345	34.872	39.335	44.165	47.269	51.805	55.759	60.436	63.691	73.402
42	23.650	25.383	28.144	30.765	34.157	36.755	41.335	46.282	49.456	54.090	58.124	62.892	66.206	76.084
44	25.148	26.939	29.787	32.487	35.974	38.641	43.335	48.396	51.639	56.369	60.481	65.337	68.710	78.750
46	26.657	28.504	31.439	34.215	37.795	40.529	45.335	50.507	53.818	58.641	62.830	67.771	71.201	81.400
48	28.177	30.080	33.098	35.949	39.621	42.420	47.335	52.616	55.993	60.907	65.171	70.197	73.683	84.037
50	29.707	31.664	34.764	37.689	41.449	44.313	49.335	54.723	58.164	63.167	67.505	72.613	76.154	86.661
52	31.246	33.256	36.437	39.433	43.281	46.209	51.335	56.827	60.332	65.422	69.832	75.021	78.616	80.272
54	32.793	34.856	38.116	41.183	45.117	48.106	53.335	58.930	62.496	67.673	72.153	77.422	81.069	91.872
56	34.350	36.464	39.801	42.937	46.955	50.005	55.335	61.031	64.658	69.919	74.468	79.815	83.513	94.461
58	35.913	38.078	41.492	44.696	48.797	51.906	57.335	63.129	66.816	72.160	76.778	82.201	85.950	97.039
60	37.485	39.699	43.188	46.459	50.641	53.809	59.335	65.227	68.972	74.397	79.082	84.580	88.379	99.607
62	39.063	41.327	44.889	48.226	52.487	55.714	61.335	67.322	71.125	76.630	81.381	86.953	90.802	102.166
66	42.240	44.599	48.305	51.770	56.188	59.527	65.335	71.508	75.424	81.085	85.965	91.681	95.626	107.258
70	45.442	47.893	51.739	55.329	59.898	63.346	69.334	75.689	79.715	85.527	90.531	96.388	100.425	112.317